



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

Gépészmérnöki Kar

Műszaki Mechanikai Tanszék

Általánosított tartószerelv alkalmazása késleltetett digitális szabályozásoknál

Deichler Anna

2015

Konzulens: Dr. Insperger Tamás  
egyetemi docens

## **Nyilatkozat**

Alulírott Deichler Anna BME-GPK hallgatója kijelentem, hogy a szakdolgozatomat nem megengedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és csak az Irodalomjegyzékben megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2015. 05. 15.

.....  
Deichler Anna

## Summary

As digital controllers are becoming more prevalent, the need for examining the effects of different hold functions on the control system increases. The thesis discusses stability analysis for different hold functions applied in digital control, with and without considering time delays within the control system. The stability analysis was carried out for the classical control problem of balancing an inverted pendulum with a discrete time PD controller. The stability of the control system was examined in case of the zero-order, first-order, second-order and for the system-matched hold functions.

In many cases the controlled plant is continuous, therefore the conversion from the digital control signal into a continuous signal is needed for proper functioning. Hold functions are responsible for converting the discrete-time signal into a continuous-time signal. The most basic form of the hold function is the zero-order hold, which holds the current value of the input signal until the next signal arrives. The  $n^{th}$  order hold uses the past  $n+1$  discrete data to generate the hold function. Higher order hold functions are proven to have the ability to increase the accuracy and in some cases the stability of the control system. The system-matched hold (SMH) is a special form of the generalized sampled data hold function, where the hold function is determined from system dynamics.

In the first three chapters the theoretical framework of the thesis is presented including the discussion of the necessity for hold functions in digital control systems, the method of plant discretization in state space and the stability criteria for control systems.

In the fourth chapter the dynamic model of the inverted pendulum was constructed. Firstly the equation of motion was derived, then the time discretization of the control system was carried out using the matrix exponential method. As a result of the discretization the whole control system can be analyzed in discrete time.

In chapter five the stability analysis was carried out for the control systems applying the zero-order, first-order, second-order hold and the system-matched hold function and the effect of time delay on stability was also investigated. The stability was presented in the form of stability charts, which were constructed in the plane of the proportional and derivative control gain parameters. The stability analysis showed that the application of higher order hold functions can increase the size of the stable region in the gain parameters plane. If there is no time delay in the system, then it was showed that for

certain control gain parameters, the stable region significantly increases, when the first- or second-order hold is used. The hold function for the system-matched hold was also constructed and it was shown that the stable region becomes infinite when there is no time delay in the system. In case of the SMH hold the degrading effects of uncertainties in the system parameters on stability was also examined. It was also showed that in all cases the presence of time delays in the system significantly decreases the stable region.

In the last chapter it was shown that there is a critical pendulum length for a given time delay, if the pendulum is shorter than the critical length, then it cannot be stabilized. The critical length was calculated in case of the ZOH hold, then it was demonstrated that with the application of higher order hold functions the critical minimal length of the pendulum for the given time delay can be decreased.

# Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	1
1. A tartószerv szerepe digitális irányításoknál.....	3
1.1 Digitális szabályozási rendszer működése .....	3
1.2 A tartószervek matematikai modelljei, jelrekonstrukció .....	5
1.2.1 Az $n$ -ed rendű tartószerv .....	5
1.2.2 Általánosított tartószerv .....	6
2. Dinamikus rendszerek állapotter reprezentációja .....	8
2.1 A homogén állapotegyenletek megoldása.....	9
2.2 Az inhomogén állapotegyenlet megoldása .....	10
2.3 Diszkrét állapotválasz felírása a mátrix exponenciálissal.....	11
3. Stabilitásvizsgálat lineáris rendszerek esetén.....	13
3.1 Lineáris folytonos idejű rendszer stabilitásvizsgálata.....	13
3.2 Diszkrét idejű rendszerek stabilitásvizsgálata.....	13
3.3 Visszacsatolt szabályozási kör stabilitásvizsgálata:.....	15
3.4 Lineárisan késleltetett visszacsatolású digitális szabályozások stabilitása.....	15
4. A vizsgált rendszer dinamikai modellje.....	17
4.1 A vizsgált rendszer mozgásegyenlete .....	17
4.2 Az alkalmazott szabályzó.....	20
4.2.1 PID szabályzók.....	20
4.2.2 PD szabályzó alkalmazása a rendszerre .....	20
4.3 A rendszer diszkrétizálása.....	22
4.3.1 A rendszer állapotter reprezentációja.....	22
4.3.2 A rendszer állapotválaszának felírása .....	23
5. A rendszer stabilitás vizsgálata .....	25
5.1 Stabilitásvizsgálat nulladrendű tartó esetén .....	27
5.1.1 Stabilitásvizsgálat nulladrendű tartó esetén, időkésés nélkül .....	29
5.1.2 Stabilitásvizsgálat nulladrendű tartó esetén, időkésleltetett rendszer ...	35
5.2 Stabilitás vizsgálat elsőrendű tartó esetén.....	39

5.2.1	Stabilitásvizsgálat elsőrendű tartó esetén, időkésés nélküli eset.....	39
5.2.2	Stabilitásvizsgálat elsőrendű tartó esetén, időkésleltetett rendszer.....	45
5.3	Stabilitás vizsgálat másodrendű tartó esetén.....	47
5.3.1	Stabilitásvizsgálat másodrendű tartó esetén, időkésés nélküli eset.....	47
5.3.2	Stabilitásvizsgálat másodrendű tartó esetén, időkésleltetett rendszer...	50
5.4	Stabilitás vizsgálat rendszerhez illesztett tartó esetén.....	52
5.4.1	A tartó függvény meghatározása rendszerhez illesztett tartó esetén.....	53
5.4.2	Stabilitásvizsgálat időkésés nélküli rendszer esetén .....	54
5.4.3	Stabilitásvizsgálat időkésést tartalmazó rendszer esetén .....	57
5.4.4	Érzékenység paraméter bizonytalanságra .....	59
6.	Stabilitásvesztés adott időkésés esetén – kritikus rúd hossz .....	61
7.	Összefoglalás.....	66
8.	Irodalomjegyzék.....	68
9.	Függelék.....	70
F.1	Matlab kódok - stabilitásvizsgálat .....	70
F.2	Szimuláció rendszer beállítására .....	73

## Bevezetés

A digitális szabályzó rendszerek egyre elterjedtebbek többek közt a komplex szabályozó algoritmusok alkalmazhatósága miatt. Ennek hatására a digitális irányításoknál központi szerepet játszó tartószervek vizsgálata is fontossá válik. Szakdolgozatomban a legáltalánosabban használt nulladrendű tartót hasonlítom össze magasabb rendű tartószervekkel és a rendszerhez illesztett tartóval stabilitás szempontból a fordított inga egyensúlyozásának problémáján keresztül. Továbbá a digitális hatások miatt jelentkező időkéés stabilitásra vonatkozó következményeit vizsgálom a különböző tartószervek esetén.

A digitális irányítási rendszerek folytonos és diszkrét jeleket is tartalmaznak, így a rendszer bizonyos pontjain jelkonvertálásra van szükség. A digitális szabályozó egység működése folytán a hibajelből számított beavatkozó jelet diszkrét jelsorozatként továbbítja az általában folytonos működésű szabályozandó rendszer felé. Ahhoz, hogy a rendszer/folyamat megfelelően működjön folytonos beavatkozó jelre van szükség, ezért a számítógép által mintavételezési időpillanatonként meghatározott diszkrét jelsorozatot tartószervek alkalmazásával folytonossá kell tenni.

Az első három fejezetben a stabilitás vizsgálatához szükséges elméleti háttérrel ismertetem. Az első fejezetben a tartószervek alkalmazásának szükségességét és a szakdolgozatban vizsgált tartószervek matematikai modelljeit ismertetem. A második fejezetben a dinamikus rendszerek állapottér reprezentációját és a folytonos idejű rendszerek mátrix exponenciálissal történő diszkrétizálásának módszerét, a harmadik fejezetben a stabilitásvizsgálathoz kapcsolódó stabilitás kritériumokat ismertetem.

A különböző tartószervek hatását a stabilitására a fordított inga PD szabályzóval történő egyensúlyozásának problémáján keresztül hasonlítom össze. A vizsgált rendszer folytonos idejű dinamikai modellje a 4. fejezetben van levezetve. A diszkrét szabályzó és a folytonos rendszer hibrid rendszert alkot, így a rendszer vizsgálatához az inga folytonos idejű dinamikai modelljének diszkrétizálására van szükség. Szakdolgozatomban a mátrix exponenciális módszert használom a rendszer diszkrét megfelelőjének előállítására.

Az 5. fejezetben a fordított inga szabályozásának stabilitás vizsgálatát végzem el a különböző tartószervek esetén időkéés nélküli, illetve időkéést tartalmazó rendszerekre. A szabályzó rendszer stabilitását a két szabályozási paraméter (proporcionális és

derivatív) síkjában felvett stabilitás térképpel szemléltetem. A stabilitástérkép a paraméter sík azon pontjait adja meg, ahol a rendszer egyensúlyi állapota aszimptotikusan stabilis [1].

A digitális irányítási rendszerekben könnyű implementálhatósága miatt a legelterjedtebben alkalmazott tartó a nulladrendű tartó. A nulladrendű tartó a beavatkozó jelet szakaszosan állandó értéken tartja a következő beavatkozó jel érkezéséig. Különböző tanulmányok azt mutatják, hogy a jelrekonstrukció pontossága növelhető magasabb rendű tartószervek alkalmazásával. Magasabb rendű tartószerveket esetén a rendszer korábbi állapotainak felhasználásával, prediktív módon van meghatározva a beavatkozó jel, így a magasabb rendű tartószervek alkalmazása stabilabb rendszert, jobb szabályzást biztosíthat [2][3].

Az  $n$ -ed rendű tartószerv mellett a rendszerhez illesztett tartót (system-matched hold) alkalmazó rendszer stabilitását vizsgálom. A rendszerhez illesztett tartó az általánosított tartószerv (generalised sampled hold function)[4, 5, 6] egyik speciális változata, amelynél a tartófüggvény a rendszer dinamika alapján van meghatározva, így pontosabb jelrekonstrukciót biztosít [7].

A 6. fejezetben az időkésést tartalmazó rendszer esetén a stabilitásvesztést vizsgálom. Adott időkésés esetén létezik egy kritikus rúd hossz, amelynél a stabil tartomány megszűnik [8], rövidebb rúd nem egyensúlyozható ki. A fordított inga nulladrendű tartót alkalmazó szabályozása esetén meghatározom  $t=0.1$  s késés esetén a minimális rúd hosszát és a magasabb rendű tartók esetén vizsgálom, hogy lehetséges-e ennél a kritikus rúd hosszánál rövidebb rudat kiegyensúlyozni.



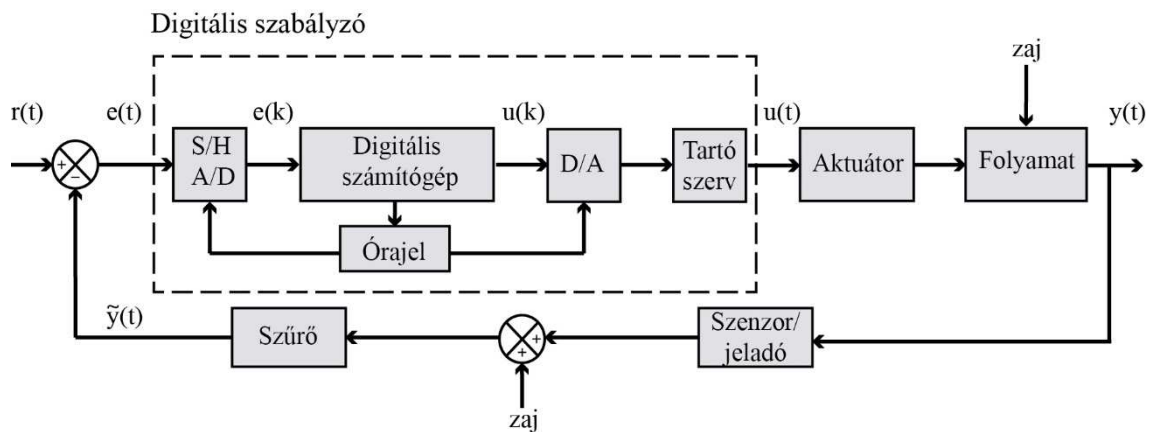
# 1. fejezet

## A tartószerv szerepe digitális irányításoknál

Digitális irányítások esetén az irányítási szabályok digitális eszközök (mikroprocesszor, mikrokontroller) által vannak implementálva. Az 1970-as évektől a számítógépek elterjedésével a digitális irányítási rendszerek is egyre elterjedtebbé váltak. Az analóg hardver eszközök szerepét egyre inkább digitális hardverek veszik át, így előtérbe kerülnek a digitális szabályzó rendszerek. Ez különösen igaz az automatikus vezérlések és a jelfeldolgozás területén. Ennek eredményeképp a diszkrét idejű rendszerek vizsgálata fontossá vált.

A digitális irányításnak számos előnye van az analóggal szemben. Ezek közé tartozik többek közt a szabályozás rugalmassága (a szabályozó módosíthatósága hardver elemek cseréje nélkül) az irányítási algoritmusok variálhatósága (algoritmus optimalizálás MIMO rendszereknél), a mérések érzékenységének növekedése.

### 1.1 Digitális szabályozási rendszer működése



1-1. ábra. A digitális szabályzó kör hatásvázlata

$r(t)$  = referencia jel

$y(t)$  = szabályozott jellemző, kimenet

$\tilde{y}(t)$  = szabályozott jellemző mért értéke

$e(t) = r(t) - \tilde{y}(t)$  = hibajel

$u(t)$  = beavatkozó jel

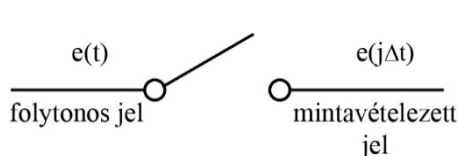
A/D = analóg digitális átalakító

D/A = digitális analóg átalakító

S/H = mintavételező és tartó egység

A digitális irányítási rendszerek általában visszacsatolt rendszerben működnek, a beavatkozó jel a szenzor segítségével mért  $y(t)$  kimenet és az elérendő  $r(t)$  referencia jel különbségéből képzett  $e(t)$  hibajel alapján van számítva (1-1.ábra). A visszacsatolt szabályozási rendszer alkalmazásának célja többek közt a rendszer stabilizálása, stabilitásának javítása, meghatározott kimenet-bemenet viselkedés elérése (model matching) és a rendszer érzékenységének növelése a zajokkal és zavarjelekkel szemben.

A digitális irányítási rendszerek legfőbb különbsége az analóg rendszerekkel szemben, hogy a számítógépek működése folytán diszkrét idejű jelekkel dolgoznak, a szabályozandó folyamatok többsége viszont folytonos idejű, emiatt a szabályozási kör bizonyos pontjain a jeleket konvertálni kell.

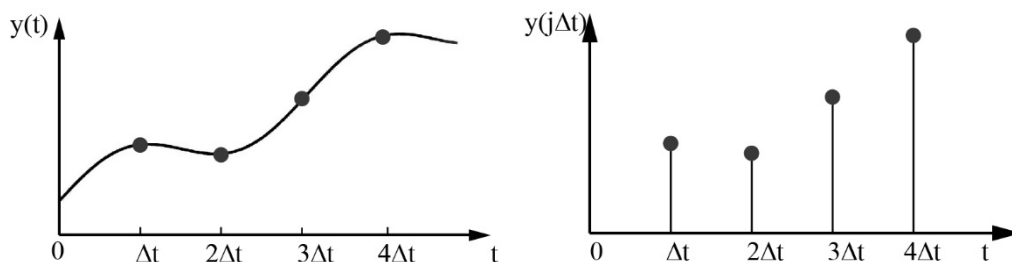


1-2. ábra. Ideális mintavételezés

A bemenő jelet a szabályzó csak diszkrét időpillanatokban használja fel. A folytonos  $e(t)$  hibajel meghatározott  $j\Delta t$  időpontokban mintavételezve van, ahol  $\Delta t$  a mintavételezési idő,  $j \in \mathbb{Z}$ .

A 1-1. ábrán szereplő irányítási rendszer állandó mintavételezési időt feltételez, a rendszerben egy mintavételezési idő van. A számítógép valós idejű órajele szinkronizálja az A/D átalakítási, számítási és D/A átalakítási folyamatokat.

Az analóg digitális jelátalakítás két részből áll: mintavételezés/tartás (S/H) és kvantálás (A/D konverter). Az ideális mintavételező egység a folytonos jelet impulzus sorozattá alakítja. Az A/D konverter feszültség (vagy áram) amplitúdót alakít át a számítógép által feldolgozható bináris kódba. Az átalakítás ideje alatti bemenet ingadozás által okozott hibák elkerülése végett az A/D konvertálást egy mintavételező/tartó (S/H) egység előzi meg, amely állandó értéken tartja konverter bemenetet az átalakítás ideje alatt.



1-3. ábra. Folytonos jel mintavételezése

A számítógép egy irányítási algoritmussal feldolgozza a bemenő jelsorozatot és egy új diszkrét jelsorozatot bocsát ki.

Ezután a D/A konverter az absztrakt bináris jelet a szabályozandó folyamat/ rendszer által feldolgozható valós fizikai mennyiséggé (például feszültség, nyomás) alakítja. A konvertálás során az absztrakt számokat konkrét impulzus sorozattá alakítja a D/A konverter, amelyet ezután egy rekonstrukciós szűrő dolgoz fel, amely extrapolációt használ az impulzusok közti jelformálásra. A tartószerv kimenete az aktuátoron keresztül van továbbítva a szabályozandó folyamat felé, hogy a rendszer dinamikáját irányítsa [9].

## **1.2 A tartószervek matematikai modelljei, jelrekonstrukció**

A legtöbb irányított folyamat analóg működésű, így a számítógép által kiadott diszkrét jelsorozatot folytonossá kell alakítani. Erre szolgál a jeltartás, amely a diszkrét idejű  $u(k)$  jelsorozatból folytonos idejű  $u(t)$  jelet állít elő. Erre több módszer is van, a választott módszer attól függ, hogy milyen pontosságú rekonstrukcióra van szükség és mennyire túlmintavételezett a jel.

### **1.2.1 Az $n$ -ed rendű tartószerv**

Irányítási rendszerekben a legelterjedtebb jelrekonstrukciós eljárás a tartófüggvények alkalmazása az egyszerűségük és könnyű megvalósíthatóságuk miatt. Az  $n$ -ed rendű tartó szakaszos  $n$ -ed rendű polinomokat ad. Általánosságban az  $n$ -ed rendű tartószerv két mintavételezési időpont között  $n$ -ed rendű polinom extrapolációt alkalmaz. Két mintavételezési időpillanat között a rekonstruált jel  $\tau$  függvényében a következő polinommal közelíthető:

$$h(j\Delta t + \tau) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + x(j\Delta t), \text{ ahol} \quad (1.1)$$

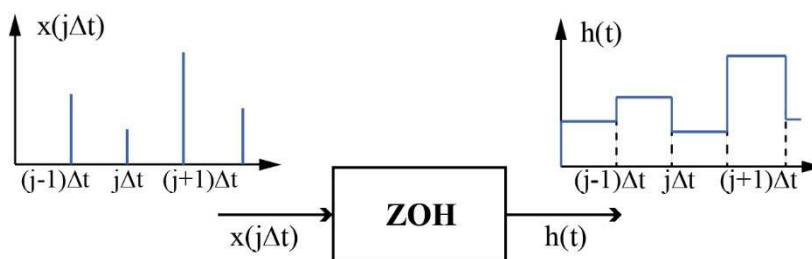
$$0 \leq \tau < \Delta t \quad j=0,1,2,\dots \quad \Delta t: \text{ a mintavételezési idő} \quad (1.2)$$

A magasabb rendű tartószervek (például elsőrendű tartószerv) a beavatkozó jelet a mintavételezési időpontok között interpolálják, így gyakran jobb irányítást biztosítanak. A magasabb rendű tartószervek/módszerek nagyobb pontosságot biztosítanak a számítási költség mérsékelt növekedése mellett [2].

### Nulladrendű tartó

A jelrekonstrukció legegyszerűbb és legelterjedtebb formája a nulladrendű tartó. A nulladrendű tartó áramköre a diszkrét jelet egy mintavételezési intervallumig tartja a kimeneten, két mintavételezési időpont között a beavatkozó jel állandó értéken van tartva. A nulladrendű tartó matematikai leírása:

$$h(j\Delta t + \tau) = x(j\Delta t) \quad j\Delta t \leq \tau < (j + 1)\Delta t, \quad (1.3)$$



1-4. ábra. Nulladrendű tartó (zero-order hold)

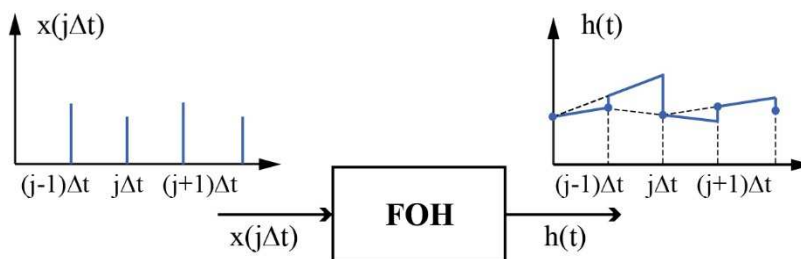
### Elsőrendű tartó

Az elsőrendű tartó visszatartja az előző és a jelenlegi értéket, az előző két mintavételt felhasználva mintavételezési intervallumonként egyenesekkel való közelítést alkalmaz.

Az elsőrendű tartó matematikai leírása:

$$h(j\Delta t + \tau) = x(j\Delta t) + a_1 \tau \quad j\Delta t \leq \tau < (j + 1)\Delta t, \quad (1.4)$$

$$a_1 = \frac{h(j\Delta t) - h((j - 1)\Delta t)}{\Delta t} \quad (1.5)$$



1-5. ábra. Elsőrendű tartó (first-order hold)

### **1.2.2 Általánosított tartószerv**

A hagyományos tartószerv helyett az általánosított mintavételezett tartó függvény (generalized sampled-data hold function – GSHF) alkalmazását először az 1980-as években kezdték vizsgálni (Chammas és Leondes [4], Kamamba [5]).

Az általánosított tartószervet alkalmazó irányítási rendszer sajátossága, hogy a tervezési változók egyike maga a tartó függvény, szemben a hagyományos módszerekkel, ahol csak a kompenzátor változói, erősítési tényezői. Tehát a (GSFH) tartó esetén a tartó függvény is tervezési paraméterré válik. Alapvető különbség a hagyományos tartószervekkel szemben, hogy a tartófüggvény a szabályozott rendszerhez van igazítva.

Az általánosított tartószerv működésének alapja, hogy a két mintavételezési pont között a rendszer dinamikája alapján meghatározott függvény adja a beavatkozó jelet, szemben a hagyományos tartószervekkel, ahol vagy állandó értéken van tartva az előző időpillanatbeli beavatkozó jel (ZOH) vagy beavatkozó jel az előző állapotok felhasználásával meghatározott  $n$ -ed rendű polinom (FOH, SOH).

A periodikus beavatkozó jel az egyenlő időközönként mintavételezett kimenet és a mintavételezési időintervallumonként érvényes folytonos  $F(t)$  tartófüggvény szorzatából adódik:

$$h(j\Delta t + \tau) = F(t)x(j\Delta t) \quad (1.6)$$

$$F(t) \neq I \quad (1.7)$$

ahol  $F(t)$  a tartó függvény, integrálható, korlátos függvény [10].

A GSFH alkalmazása a zárt szabályozási kör teljesítményét jelentősen javíthatja. Emellett általánosított tartószerv alkalmazásával a hagyományos tartószervek esetén nem stabilizálható rendszerek is stabilizálhatók [5].

## 2. fejezet

### Dinamikus rendszerek állapotter reprezentációja

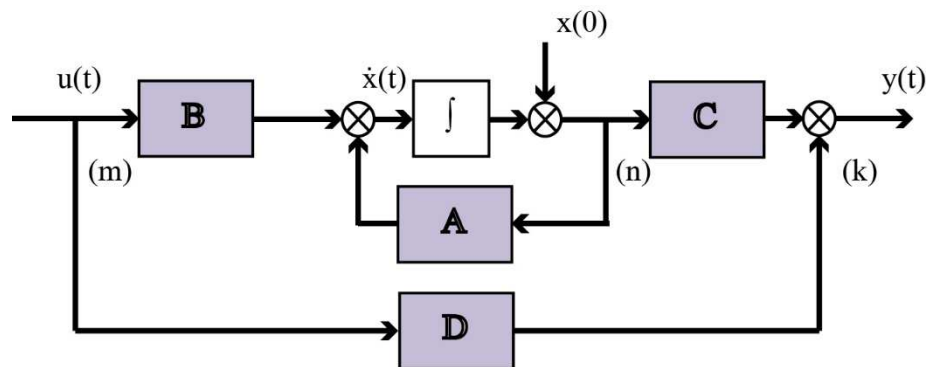
A hagyományos irányítástechnikával szemben, ahol a leírás a bemenet-kimenet kapcsolaton alapul és a rendszert az átviteli függvény segítségével írja le, a modern irányítástechnika a rendszert elsőrendű differenciálegyenletek segítségével írja le, amelyek elsőrendű vektor-mátrix differenciálegyenletbe rendezhetők. Állapotter leírás esetén így az állapotváltozók, bemenetek vagy kimenetek számának növelése nem növeli a leíró egyenletek komplexitását.

Egy rendszer állapota leírható az állapotváltozókra adott elsőrendű differenciálegyenletek segítségével. A rendszert leírható elsőrendű differenciálegyenletek felírhatók mátrixos formában:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A rendszer állapotegyenletének kompakt felírása:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.2)$$



2-1. ábra. Lineáris állapotter modell hatásvázlata

Az (2.2) egyenletben használt jelölések:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ : a rendszert leíró állapotváltozók vektora

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ : a beavatkozó jel vektora

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : rendszer mátrix

$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ : bemeneti mátrix

A rendszer kimeneteinek kapcsolatát az állapotváltozókkal és a bemeneti jelekkel a kimeneti egyenlet írja le.

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

A rendszer állapotter reprezentációja a rendszerre felírt állategyenletből és kimeneti egyenletből áll.

## 2.1 A homogén állapotegyenletek megoldása

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.5)$$

A (2.4) egyenlet egy olyan LTI (Linear Time-Invariant) rendszert ír le, amelyre nem hat rendszertől független gerjesztés. Tetszőleges  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  vektor az állapotváltozókat tartalmazza,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a rendszerre jellemző konstansokat tartalmazó mátrix.

A megoldást hatványsor formájában feltételezve:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k \dots \quad (2.6)$$

Az eredeti állapot egyenletbe (2.4) a feltételezett megoldás helyettesítésével:

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \dots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} \dots = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots) \quad (2.7)$$

A (2.6) megoldás feltételezésével a fenti egyenletnek minden  $t$  időpillanatra teljesülnie kell, így  $t$  együtthatóinak megfeleltetésével:

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \mathbf{b}_0 \quad (2.8)$$

A (2.6) egyenletbe  $t=0$  helyettesítésével:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0 \quad (2.9)$$

Így a homogén rendszer  $\mathbf{x}(t)$  megoldása felírható:

$$\mathbf{x}(t) = \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots \right) \mathbf{x}(0) \quad (2.10)$$

A fenti egyenletben szereplő kifejezés nyomán a mátrix exponenciális bevezetése:

$$e^{\mathbf{A}t} := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \quad (2.11)$$

A mátrix exponenciális fontos szerepet játszik a lineáris rendszerek állapotter analízisében. A homogén rendszerválasz  $\mathbf{x}_H(t)$  felírható a mátrix exponenciális segítségével [11]:

$$\mathbf{x}_H(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad (2.12)$$

A mátrix exponenciális másik elnevezése átviteli mátrix, mivel megadja a kezdeti állapotból  $x(0)$  a végállapotba  $x(t)$  való átmenetet az (2.2)-(2.3) rendszer esetén. Az állapot átviteli mátrix minden információt tartalmaz a rendszer szabad mozgásairól. Általános esetben a homogén állapotegyenlet megoldása az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\mathbf{x}_H(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad (2.13)$$

ahol  $\Phi(t) :=$  a rendszer állapot átviteli mátrixa

Az átviteli mátrix a kezdeti feltételek átalakulását írja le, segítségével tetszőleges kezdeti problémára bármely időpontban megadható a rendszer állapotválasza.

## 2.2 Az inhomogén állapotegyenlet megoldása

Az inhomogén állapotegyenlet:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

A fenti állapotegyenlet átírásával adódik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalának megszorozása  $e^{-\mathbf{A}t}$ -vel:

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.16)$$

A fent egyenletet  $t_0$ -tól  $t$ -ig integrálva az alábbi egyenlet adódik:



$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} [e^{-A\tau} \mathbf{x}(\tau)] d\tau = e^{-At} \mathbf{Ax}(t) - e^{-A0} \mathbf{Ax}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

A fenti egyenlet ( $e^{At}$ )-vel való szorzása és átrendezése után [11]:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

A (2.18) kifejezés elnevezése konstans-variációs formula.

A (2.18) egyenletben megadott állapotválasz két tagból áll. Az első tag az autonóm választ, a homogén megoldást adja:  $\mathbf{x}_H(t) = e^{At} \mathbf{x}(0)$ . A homogén megoldás csak az  $\mathbf{x}(0)$  kezdeti feltételtől függ. A másik tag az  $\mathbf{u}(t)$  gerjesztésre adott választ írja le.

A (2.18) egyenlet kiértékelése mátrix integrálást tartalmaz. Az  $n$ -ed rendű rendszer válasza  $r$  számú bemenetre így:  $e^{At}$   $n \times n$  -es mátrix,  $\mathbf{B}$   $n \times r$  -es mátrix,  $\mathbf{u}(t)$   $r \times 1$ -es oszlopvektor, így  $e^{A(t-\tau)} \mathbf{Bu}(\tau)$  szorzat  $n \times 1$ -es oszlopvektor, amely külön tartalmazza az állapotváltozókra vonatkozó megoldást.

A konstans-variációs formula felírható  $\Phi$  átviteli mátrixszal is [11]:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

### 2.3 Diszkrét állapotválasz felírása a mátrix exponenciálissal

A folytonos idejű állapot egyenlet megoldásából (2.18) diszkrét idejű differencia egyenlet írható fel, amennyiben a választ egy  $[t_0, t_0 + \Delta t)$  intervallumon feltételezzük, ahol  $\Delta t$  a mintavételezési időnek, időlépésnek felel meg. Figyelembe véve, hogy az idő diszkrétizációnál  $\Delta t$  időlépés állandó, az integrálási határok:  $t_0 = j \Delta t$  és  $t = (j + 1) \Delta t$ , ahol  $j \in \mathbb{Z}$ . Továbbá az állapotvektorra vonatkozóan az alábbi jelölések kerülnek bevezetésre:

$$\mathbf{x}((j + 1) \Delta t) := \mathbf{x}_{j+1} \quad \mathbf{x}(j \Delta t) := \mathbf{x}_j \quad (2.20)$$

Így a diszkrét idejű állapotválasz függvény alakja:

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_j + \int_{j \Delta t}^{(j+1)\Delta t} e^{A((j+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

Feltételezve, hogy a bemenet két mintavételi időpont között állandó, a bemeneti mátrix és bemeneti vektor szorzat kiemelhető az integrálból:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_j \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta t) \quad t_0 := j \Delta t \quad (2.22)$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_j + \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} e^{A((j+1)\Delta t - \tau)} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}_j \quad (2.23)$$

Így az állapot egyenlet diszkrét formáját kapjuk [12]:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_j \quad (2.24)$$

$$\mathbf{A}_d = e^{A\Delta t} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}_d = \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} e^{A((j+1)\Delta t - \tau)} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}_j \quad (2.25)$$

$\mathbf{A}_d$ : a diszkrét rendszer mátrix

$\mathbf{B}_d$ : a diszkrét bemeneti mátrix

Így az (2.2, 2.3) rendszer diszkrét idejű rendszerként vizsgálható.

Tehát a mátrix exponenciális segítségével felírt inhomogén állapotválasz alapján, ha a (2.18) integrált egy mintavételezési időintervallumra vesszük, a rendszer diszkrét megfelelőjéhez/ diszkrét állapotegyenletéhez jutunk (2.24). A diszkrét állapotegyenlet a folytonos állapotegyenlethez (2.2) hasonlóan két tagból áll. Az első tag az autonóm rendszerválaszt, a második tag a bemenetre adott választ tartalmazza.

### 3. fejezet

#### Stabilitásvizsgálat lineáris rendszerek esetén

A lineáris rendszer (2.2)  $x_e = 0$  egyensúlyi helyzete Lyapunov értelemben stabilis, ha bármely  $\varepsilon$ -hoz létezik  $\sigma(\varepsilon, t_0) > 0$ , hogy ha  $\|x(t_0)\| < \sigma$ , akkor  $\|x(t)\| < \varepsilon$ ,  $t > t_0$  esetén.

A lineáris rendszer (2.2)  $x_e = 0$  egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis, ha

1. Lyapunov értelemben stabilis
2. Létezik  $\sigma'(t_0)$ , hogy ha  $\|x(t_0)\| < \sigma'$ , akkor  $x(t) \rightarrow 0$  ha  $t \rightarrow \infty$ .

#### 3.1 Lineáris folytonos idejű rendszer stabilitásvizsgálata

Lineáris rendszer stabilitása a rendszermátrix karakterisztikus egyenletén keresztül vizsgálható:

$$\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.1)$$

Ha  $\mathbf{A}$  négyzetes mátrix ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ), akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy  $n$ -ed fokú polinom, amelyet karakterisztikus polinomnak nevezünk.

Egy lineáris folytonos állapotér modell (2.2) aszimptotikusan stabilis, ha teljesül:  $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$ , ahol  $\lambda_i$  értékek  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei. Tehát a rendszer stabilis, ha  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékeinek valós része negatív.

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \quad (3.2)$$

#### 3.2 Diszkrét idejű rendszerek stabilitásvizsgálata

Diszkrét idejű rendszer esetén (2.24) is a rendszer mátrix sajátértékei határozzák meg a rendszer stabilitását.

A (2.4) egyenlet diszkrét rendszerre vonatkozó alakja:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k) \mathbf{x}(0) \quad (3.4)$$

Ahol  $\mathbf{A}^k = \mathbf{\Phi}(k)$  a diszkrét állapot átviteli mátrix.

Legyen  $\mathbf{M}$  a mátrix sajátvektorait tartalmazó sorvektor,  $\mathbf{\Lambda}$  a mátrix sajátértékeit tartalmazó mátrix:

$$\mathbf{M} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix}, \text{ekkor } \mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \mu_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n^k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Így a diszkrét idejű átviteli mátrix alakja:

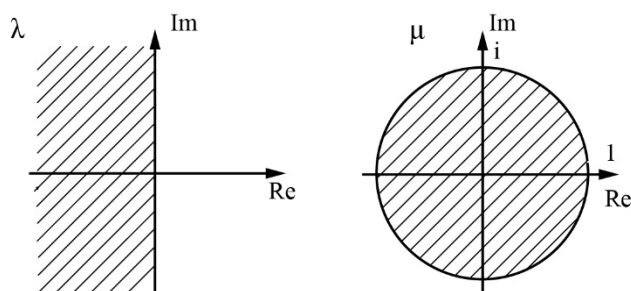
$$\Phi(k) = \mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{M}^{-1} \quad (3.7)$$

A rendszer aszimptotikusan stabilis, ha  $\mathbf{x}(k)$  állapotvektor homogén válasza  $\mathbf{x}(0)$  tetszőleges kezdeti feltétel esetén visszatér az origóba, ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k)\mathbf{x}(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0) = 0 \quad (3.8)$$

Az (3.8) kifejezés alapján a (2.24) rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a rendszer sajátértékeinek abszolút értéke kisebb mint egy [13].

$$|\mu_i| < 1 \quad (3.9)$$



3-1. ábra. Sajátértékekre vonatkozó stabilitáskritériumok folytonos és diszkrét idejű rendszerek esetén

### 3.3 Visszacatolt szabályozási kör stabilitásvizsgálata:

A rendszer dinamikája és stabilitása pólusáthelyezéssel befolyásolható. A lineáris rendszer (2.2) állapot visszacsatolása esetén a beavatkozó jel:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (3.10)$$

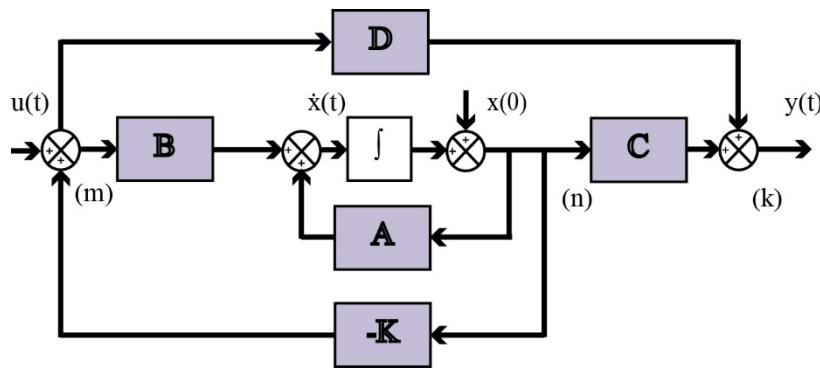
,ahol  $\mathbf{K}$  az állapot visszacsatolási mátrix. Így az állapotegyenlet:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) \quad (3.11)$$

A fenti egyenlet megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t}\mathbf{x}(0) \quad (3.12)$$

Így a visszacsatolt rendszer stabilitását  $(\mathbf{A}-\mathbf{BK})$  mátrix sajátértékei határozzák meg.



3-2. ábra. Visszacatolt szabályozási kör állapotér reprezentációja

### 3.4 Lineárisan késleltetett visszacsatolású digitális szabályozások stabilitása

Az irányított rendszerek viselkedésének leírásában fontos a digitális effektusok figyelembe vétele, mint a visszacsatolásból adódó késés. Időkésés gyakran jelentkezik visszacsatolt rendszerekben az információ feldolgozása, számítási idők és a rendszer elemek közti információtovábbítás miatt. Az információkésés sok esetben elhanyagolható, de bizonyos rendszerek esetén kritikus szerepet játszik, mivel a rendszer viselkedésére, stabilitására negatív hatással van (vegyipari folyamatok [14], úrkalkalmazások [15], hálózati kooperatív robot irányítások [16]). Emiatt érdemes az időkésést a mechanikai modellbe foglalni, stabilitásvizsgálatkor figyelembe venni.

A visszacsatolás késése miatt az irányítási rendszert leíró egyenlet késleltetett differenciálegyenlet. A késleltetett differenciálegyenlet fázistere általában végtelen dimenziójú, így stabilitásuk lineáris stabilitás kritériumokkal nem vizsgálható, mert a kritériumok komplikálttá válnak vagy nincs analitikus alakjuk.

Az késleltetett rendszerek stabilitás vizsgálatára alkalmas eszköz a szemi-diszkretizációs módszer. A módszer alapja, hogy a folytonos rendszert félig diszkrét rendszerrel közelíti, csak az időkéséses elemek diszkretizáltak, az időtartománybeli tagok változatlanok, így a késleltetett differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletekkel közelíti [17].

A diszkrét irányítású folytonos rendszerek a mintavételezés és nulladrendű tartó alkalmazása miatt is szemi-diszkretizált jellegűek. Az így kapott véges dimenziójú diszkrét leképezés a szemi-diszkretizációs módszerhez hasonló modellt ad.

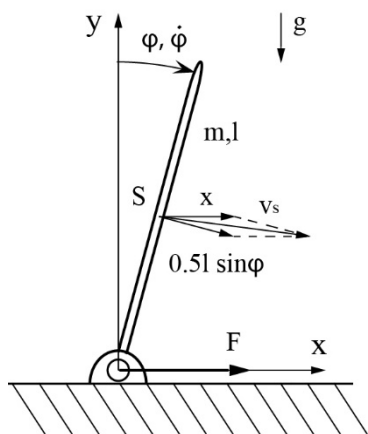
A késleltetett differenciálegyenletekre vonatkozó Floquet-elmélet értelmében a rendszer stabilitását a rendszer monodrómia operátorának nem zérus sajátértékei, a karakterisztikus multiplikátorok határozzák meg. A rendszer akkor stabil, ha a sajátértékek a komplex sík egységkörén belül helyezkednek el [18].

A végtelen fázistér végtelen számú gyököt jelent, véges számú irányítási paraméterrel irányítva. A pólusáthelyezéssel stabilizálás így nem alkalmazható ezen rendszerek esetén. A késleltetett rendszerek stabilizálásának hatékony módszere a várakozás és beavatkozás módszerrel történhet. A módszer lényege, hogy a szabályzó az időkésésnél nagyobb periódusonként van ki-be kapcsolva. Az így adódó rendszer már véges dimenziós, véges számú gyökkel rendelkezik, tehát véges számú gyököt kell kezelni. A kapcsolás hatására az időkéséses visszacsatolt tag adott  $t_w$  várakozási időre ki van kapcsolva, adott  $t_a$  beavatkozási időre be van kapcsolva [19].

## 4. fejezet

### A vizsgált rendszer dinamikai modellje

#### 4.1 A vizsgált rendszer mozgásegyenlete



4-1. ábra. A fordított inga mechanikai modellje

A rúdegyensúlyozás mechanikai modellje egy fizikai ingát tartalmaz, amely modell egy vízszintes tengelyű csukló körül függőleges síkban elfordulni képes rúdból áll. A fordított inga tömegközéppontja a befogás felett található, így a fordított inga önmagában instabil, stabilizálására beavatkozó erőre van szükség ( $F$ ).

A vizsgált fordított inga modell két szabadsági fokkal rendelkezik. A szabadsági fokoknak megfelelően választott általános koordináták a vízszintes elmozdulást leíró  $x$  és a függőleges helyzettől való szögkitérést leíró  $\varphi$  koordináták.

Az inga kitérésének szabályozáshoz  $\varphi$  és  $\dot{\varphi}$  értékek vannak visszacsatolva.

A mechanikai modellben használt változók jelöléséről:

- $g$  gravitációs gyorsulás
- $m$  a rúd tömege
- $\theta$  a rúd tehetetlenségi nyomatéka
- $l$  rúd hossza
- $\varphi$  az inga szögkitérése függőlege helyzettől
- $\omega$  az inga szöggyorsulása
- $x$  az inga súlypontjának vízszintes elmozdulása

A Lagrange-egyenletek segítségével a rendszer elemeinek energia tartalma alapján előállíthatók a rendszer viselkedését leíró differenciálegyenletek. A másodfajú Lagrange egyenletek általános alakja  $n$  szabadsági fokú rendszer esetén:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k(t), \quad \text{ahol } k = 1 \dots n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

A mozgásegyenlet felírásához szükséges kiegészítő számítások:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \varphi \\ \frac{l}{2} \sin(\varphi) & \frac{l}{2} \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \dot{\varphi} \frac{l}{2} \cos(\varphi) \\ -\frac{l}{2} \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A kinetikus energia és a potenciális energia számítása a rendszerre:

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \theta \omega^2 = \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l \dot{x} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi) + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m l^2 \right) \dot{\varphi}^2)$$

$$U = m g \frac{l}{2} \cos(\varphi) \quad (4.5)$$

Az általánosított erő felírásához a rendszer teljesítmények számítása:

$$P = \mathbf{F} \mathbf{v}_A = [F \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = F \dot{x} = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.6)$$

Így a választott általános koordinátáknak megfelelő általános erők felírhatók.

$$Q_2 = F(\dot{\varphi}, \varphi) \quad Q_1 = 0 \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Így a másodfajú Lagrange egyenletek felírhatók a rendszerre:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q_2 \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q_1 \quad (4.9)$$

A részszámítások elvégzése után a kapott kifejezéseket a Lagrange-egyenletbe helyettesítve az alábbi nemlineáris mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m l \ddot{x} \cos(\varphi) - m g \frac{l}{2} \sin(\varphi) = 0 \quad (4.10)$$

$$m \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \frac{l}{2} m g \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) = F(\dot{\varphi}, \varphi) \quad (4.11)$$



Mivel a fordított inga egyensúlyozásnál a szöghelyzetet leíró koordináta lényeges, az (4.10)-(4.11) egyenleteket érdemes átrendezni kizárólag  $\varphi$  szögkitérést tartalmazó differenciálegyenletté. A (4.11) egyenlet szorzása és átrendezése után adódik:

$$\left( \frac{1}{2} l \cos(\varphi) \right) \cdot (4.11)$$

$$\frac{1}{2} ml \ddot{x} \cos(\varphi) + \frac{1}{4} ml^2 \ddot{\varphi} \cos^2(\varphi) - \frac{1}{4} ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \frac{l}{2} F(\dot{\varphi}, \varphi) \cos(\varphi) \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{2} ml \ddot{x} \cos(\varphi) = -\frac{1}{4} ml^2 \ddot{\varphi} \cos^2(\varphi) + \frac{1}{4} ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \frac{l}{2} F(\dot{\varphi}, \varphi) \cos(\varphi) \quad (4.13)$$

$\sin(\varphi) \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$  azonosság és (4.13) kifejezés behelyettesítése (4.10)-be:

$$\left( \frac{1}{3} ml^2 - \frac{1}{4} ml^2 \cos^2(\varphi) \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{8} ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin(2\varphi) + \frac{l}{2} F(\dot{\varphi}, \varphi) \cos(\varphi) - mg \frac{1}{2} \sin(\varphi) = 0 \quad (4.14)$$

Így a fenti egyenlet átrendezése után a  $\varphi$  szöghelyzetre kapott mozgásegyenlet:

$$(4 - 3 \cos^2(\varphi)) \ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \dot{\varphi}^2 \sin(2\varphi) - 6gl \sin(\varphi) = -\frac{6 \cos(\varphi)}{ml^2} F(\dot{\varphi}, \varphi) \quad (4.15)$$

A (4.15) nemlineáris mozgásegyenletet  $\varphi = 0$  egyensúlyi helyzet körül linearizálva a kis kitérésekre érvényes mozgásegyenlet adódik. Az  $\varphi = 0$  egyensúlyi helyzet esetén érvényes közelítések, figyelembe véve, hogy  $\varphi$  értéke kicsi:

$$\sin(\varphi) \cong \varphi \quad \cos(\varphi) \cong 1 \quad \sin(2\varphi) \cong 2\varphi \quad \dot{\varphi}^2 \varphi \cong 0 \quad (4.16)$$

A (4.16) közelítések figyelembe vételével a fordított inga linearizált mozgásegyenletére az alábbi egyenlet adódik:

$$\ddot{\varphi} - \frac{6g}{l} \sin(\varphi) = -\frac{6}{ml} F(\dot{\varphi}, \varphi) \quad (4.17)$$

A levezetett mozgásegyenletből (4.17) látszik, hogy a rendszer szabad mozgását a rúd hossza határozza meg.

## 4.2 Az alkalmazott szabályzó

### 4.2.1 PID szabályzók

A PID szabályzó a legelterjedtebben alkalmazott szabályzó algoritmus, az egyszerűbb egyhurkú szabályozástól a bonyolultabb, hierarchikus szabályzási körökben is megtalálható. A ma használt PID szabályzók többsége digitális, mikroprocesszor alapú, ezáltal sok folytonos esetben nem elérhető funkcióval rendelkeznek a szabályzók, mint például az automatikus hangolás, folytonos adaptáció.

A folytonos idejű PID szabályzó algoritmus:

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.18)$$

A PID szabályzó három tagból álló visszacsatolt szabályzó: a  $P$  tag a hibajellel arányos, az  $I$  tag a hibajel integráljával arányos egy bizonyos időintervallumon, a  $D$  tag a hibajel deriváltjával arányos.

Digitális PID szabályzó esetén az beavatkozó jel az előző mintavételi beavatkozó jelekből és korrekciós tényezőkből van számítva.

Szakedolgozatomban a stabilitás analízishez használt szabályzó a PID szabályzók egyik legegyszerűbb formája a PD szabályzó, amely  $P$  és  $D$  konstans erősítéseket tartalmaz.

### 4.2.2 PD szabályzó alkalmazása a rendszerre

$$\ddot{\varphi} - \frac{6g}{l} \sin(\varphi) = -\frac{6}{ml} F(\dot{\varphi}, \varphi) \quad (4.19)$$

Az inga mozgását leíró differenciálegyenletben (4.19)  $F(\dot{\varphi}, \varphi)$  jelöli a beavatkozó erőt. Ez a beavatkozó erő ember általi rúdegyensúlyozásnál lehet a kar által kifejtett erőt vagy szabályzó alkalmazása esetén a beavatkozó szerv által kifejtett erőt ( $u(t)$  1-1. ábra).

Analóg esetben a szabályzó által kiadott szabályozási erő folytonos, minden időpillanatban adott. Digitális esetben a szabályzó erő csak a mintavételezési idő által meghatározott diszkrét időpontokban adott. Két mintavételi időpont között a jelet a tartószerv biztosítja.

Diszkrét PD szabályzó esetén a beavatkozó jel függvénye:

$$u(t_j) = -P\varphi(t_j) - D\dot{\varphi}(t_j) \quad (4.20)$$

A szabályzó alkalmazásával a rendszer mozgásegyenlete:

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{6g}{l} \varphi(t) = -\frac{6}{ml} (P\varphi(t_j) + D\dot{\varphi}(t_j)) \quad (4.21)$$

A (4.23) egyenlet által leírt rendszert folytonos és diszkrét idejű tagokat is tartalmaz, az ilyen rendszereket hibrid rendszernek nevezzük.

A továbbiakban a következő jelölések kerülnek alkalmazásra:

$$\beta^2 := \frac{6g}{l} \quad k_p := \frac{6}{ml} P \quad k_d := \frac{6}{ml} D \quad (4.22)$$

Így a rendszer továbbiakban alkalmazott paraméteres mozgásegyenlete:

$$\ddot{\varphi}(t) - \beta^2 \varphi(t) = -k_p \varphi(t_j) - k_d \dot{\varphi}(t_j) \quad (4.23)$$

$$\ddot{\varphi}(t) - \beta^2 \varphi(t) = u_j \quad (4.24)$$

### 4.3 A rendszer diszkrétizálása

Ahhoz, hogy az egész rendszer diszkrét idejű rendszerként modellezhető legyen, elő kell állítani a folytonos rendszer diszkrét idejű megfelelőjét, a folytonos idejű rendszer szimulációjához szükség van a folytonos rendszer diszkrét megfelelőjére. A rendszer diszkrét idejű megfelelőjének előállítása során a leíró differenciálegyenleteket differenciaegyenletekké kell alakítani. A folytonos idejű rendszer diszkrét megfelelőjének előállítása a mátrix exponenciális segítségével történik, ezért szükség van a rendszer állapotter reprezentációjára.

#### 4.3.1 A rendszer állapotter reprezentációja

A rendszer leírása időtérben:

$$\ddot{\varphi}(t) - \beta^2 \varphi(t) = u(t) \quad (4.25)$$

Állapotváltozó vektor bevezetése:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

A beavatkozó jel állapot visszacsatolásos szabályozási kör esetén:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (4.27)$$

Ahol  $\mathbf{K}$  a visszacsatolás erősítési mátrix, a proporcionális és derivatív erősítési tényezőket tartalmazó mátrix, tartószervtől függően változik.

Így a rendszer állapotteres felírása az (2.2) egyenlet alapján:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Mivel a szabályozás digitális,  $u(t)$  beavatkozó jel (4.29), diszkrét időpillanatokra van meghatározva szükség van a diszkrétizált idő bevezetésére:

$$t_j = j\Delta t, \text{ ahol } \Delta t \text{ a mintavételezési idő.} \quad (4.30)$$

Így a PD szabályzó esetén nulladrendű tartót alkalmazó rendszer esetén a beavatkozó jel függvénye időkézés nélkül:

$$u_j = -k_p \varphi_j - k_d \dot{\varphi}_j \quad (4.31)$$

#### 4.3.2 A rendszer állapotválaszának felírása

Az adott rendszer állapotválasza felírható a mátrix exponenciális segítségével, a konstans-variációs formulával (2.18).

Az adott rendszer (4.28) állapotválaszának felírása mátrix exponenciális formában.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

Az (4.32) egyenlet diszkrétizálható, ha a választ  $t_0$ -tól  $t_0 + \Delta t$  időtartamon számítjuk, ahol  $\Delta t$  a konstans diszkrét időlépés/mintavételezési idő. Így a (2.23) mintájára a rendszer (4.28) diszkrét felírásához jutunk és így a rendszer stabilitása diszkrét időben vizsgálható.

$$\mathbf{x}(\Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_j \quad (4.34)$$

A folytonos idejű rendszer diszkrét idejű leképezéséhez szükség van a rendszer mátrix exponenciálisának felírására.

A mátrix exponenciális a rendszer mátrixból számítható:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

A rendszerre vonatkozó mátrix exponenciális felírása:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 \\ \beta^4 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \beta^2 \frac{t^2}{2!} + \beta^4 \frac{t^4}{4!} + \dots & + \beta^2 \frac{t^3}{3!} + \beta^4 \frac{t^5}{5!} + \dots \\ \beta^2 t + \beta^4 \frac{t^3}{3!} + \beta^6 \frac{t^5}{5!} + \dots & + \beta^2 \frac{t^2}{2!} + \beta^4 \frac{t^4}{4!} + \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

A fenti kifejezésen belül a hiperbolikus szinusz és hiperbolikus koszinusz függvények Taylor sorai kiemelhetők:

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (4.37)$$

Így a rendszer mátrix exponenciálisának alakja:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\beta t) & \frac{1}{\beta} \operatorname{sh}(\beta t) \\ \beta \operatorname{sh}(\beta t) & \operatorname{ch}(\beta t) \end{bmatrix} \qquad (4.38)$$

A mátrix exponenciális segítségével a rendszer állapotválasza már számítható különböző beavatkozó jelek esetén. Így az állapotválaszt egy mintavételezési időintervallumra feltételezve a folytonos rendszer diszkrét megfelelője felírható. Ezáltal a rendszer modell már nem hibrid, a szabályozási rendszer stabilitása diszkrét rendszerként vizsgálható

## 5. fejezet

### A rendszer stabilitás vizsgálata

A rendszer stabilitását nulladrendű, elsőrendű, másodrendű és rendszerhez illesztett tartószervek esetén vizsgálom diszkrét időben időkézés nélküli, illetve időkézéses esetben.

A rendszer diszkrét idejű differencia egyenlete minden esetben a folytonos rendszer inhomogén állapotválaszának diszkrét felírásából van levezetve a konstans-variációs formula segítségével. Ezt követően a rendszer aszimptotikus stabilitása a diszkrét rendszer átviteli mátrixának sajátértékeire vonatkozó feltétel (3.9) alapján van meghatározva a különböző erősítési tényezőkre.

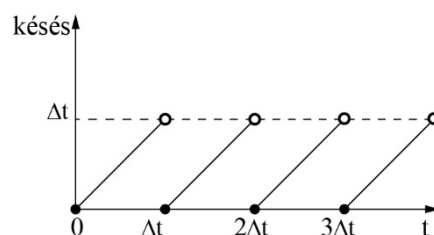
A vizsgált rendszer adatai:

$$l := 2 \text{ m} \qquad \beta^2 := \frac{6g}{l} = 29.44 \qquad \Delta t = 0.1 \text{ s} \qquad (5.1)$$

A különböző tartószervek esetén a beavatkozó erő változik. Nulladrendű tartószerv esetén két mintavételi időpont között a beavatkozó jel konstans, elsőrendű tartószerv esetén két mintavételi időpont között  $u(t)$ függvény (4.27) lineáris, másodrendű tartó esetén másodfokú parabola. Rendszerhez illesztett tartó esetén a beavatkozó jelet a rendszer dinamikája alapján meghatározott tartó függvény adja.

A tartószervek összehasonlításán túl az időkézés hatását is vizsgálom a rendszer stabilitására a különböző tartók esetén. Időkézés gyakran jelentkezik szabályozási problémáknál és instabilitáshoz vezethet [3.4 fejezet], ezért fontos a modellbe foglalni.

Időkézés nélküli esetben a rendszer kérése a mintavételi időpontok között 0 és  $\Delta t$  között lineárisan változik.

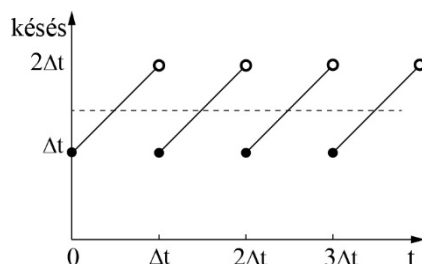


5-1. ábra. A rendszer kérése időkézés nélküli rendszer esetén

$$\ddot{\varphi}(t) - \beta^2 \varphi(t) = u(t_j) \qquad (5.2)$$

A visszacsatolós szabályozás a mintavételezés miatt késést visz a rendszerbe. Az információ terjedés és a számítási idők miatt fellépő időkéésés egy  $\Delta t$  mintavételezési időnek megfelelő nagyságúnak van modellezve.

Így a modellezett időkééséses rendszerek esetén az időkéésés két mintavételezési időpillanat között így  $\Delta t$  és  $2\Delta t$  között változik, az átlagos időkéésés így  $1,5 \Delta t$ . Az időkéésés konstans, a mintavételezési idővel megegyezően  $\tau = \Delta t$  van modellezve [20].



5-2. ábra. Mintavételezés hatása mint időfüggő késés

$$\ddot{\varphi}(t) - \beta^2 \varphi(t) = u(t_j - \tau) \quad (5.3)$$

A következő szakaszokban különböző tartószervek hatását vizsgálom a stabilitásra a szabályozási erősítési paraméterek függvényében. A stabil tartomány minden esetben a nulladrendű szabályozási paraméterek  $(k_{p0}, k_{d0})$  síkjában van meghatározva.

Nulladrendű tartó esetén a szabályozási paraméterek  $(k_{p0}, k_{d0})$  által meghatározott stabil tartomány megjeleníthető a szabályozási paraméterek által meghatározott stabilitás térképen. Elsőrendű tartó esetén még megjeleníthető a stabilitás tartomány változása a négy elsőrendű szabályozási paraméter változtatásának hatására két dimenziós ábrán. Másodrendű tartó esetén a hat szabályozási paraméter miatt a stabil tartomány változásának ábrázolása bonyolultabb, a két dimenziós ábrázoláshoz az elsőrendű erősítési tényezőket fix értékűnek veszem.

Elsőrendű és másodrendű tartók stabilitásvizsgálata esetén az elsőrendű és másodrendű erősítési tényezők numerikus léptetése a rendszer dinamikához mérten vannak választva.

Az összehasonlíthatóság érdekében a stabilitástérképek a szabályozási erősítési tényezők léptetésével, numerikusan vannak meghatározva. A stabilitást az átviteli mátrix sajátértékeinek vizsgálatával diszkrét pontonként van meghatározva. Az átviteli mátrixot minden esetben külön kell meghatározni a beavatkozó jel eltérő alakja miatt.



## 5.1 Stabilitásvizsgálat nulladrendű tartó esetén

A (5.2) mozgásegyenlettel leírt fordított inga visszacsatolt rendszerben, nulladrendű tartó alkalmazásával történő szabályozása esetén a rendszer állapotválasza (4.33) egyenlet alapján levezethető.

Nulladrendű tartó esetén két mintavételezési időpont között  $\mathbf{u}(t)$  beavatkozó jel állandó (1-4. ábra), így az állapotválasz integrál tagjából a bemeneti mátrix, beavatkozó jel szorzat kiemelhető.

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}(t_j) := \mathbf{u}_j \quad \tau \in [j\Delta t, (j+1)\Delta t) \quad t_j = j\Delta t \quad (5.4)$$

$$\mathbf{x}(\Delta t) = e^{A\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds = e^{A\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(t-s)} ds \mathbf{B}\mathbf{u}_j \quad (5.5)$$

A fenti egyenlet integráljának számítása amennyiben  $\mathbf{A}$  mátrix nem szinguláris.

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} e^{A(t-s)} ds &= e^{A\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-As} ds = e^{A\Delta t} [-\mathbf{A}^{-1}e^{-As}]_0^{\Delta t} = e^{A\Delta t} \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{I} - e^{-A\Delta t}] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) & \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta\Delta t) - 1) \\ \text{ch}(\beta\Delta t) - 1 & \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Így a vizsgált rendszer inhomogén állapotválasza felírható:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\Delta t) &= e^{A\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds = \\ &= e^{A\Delta t} \mathbf{x}(0) + e^{A\Delta t} \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{I} - e^{-A\Delta t}] \mathbf{B}\mathbf{u}_j \end{aligned} \quad (5.7)$$

Az eddigiek alapján a rendszer állapotválasza felírható. A rendszer állapotválasza mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\Delta t) \\ \dot{\varphi}(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\beta\Delta t) & \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) \\ \beta \text{sh}(\beta\Delta t) & \text{ch}(\beta\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \dot{\varphi}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) & \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta\Delta t) - 1) \\ \text{ch}(\beta\Delta t) - 1 & \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_j \quad (5.8)$$

A továbbiakban  $\mathbf{x}_j$  a  $(j\Delta t)$  időpillanatbeli,  $\mathbf{x}_{j+1}$  a  $(j+1)\Delta t$  időpillanatbeli állapotvektort jelöli, továbbá:

$$\varphi(j\Delta t) := \varphi_j \quad \dot{\varphi}(j\Delta t) := \dot{\varphi}_j \quad \varphi((j+1)\Delta t) := \varphi_{j+1} \quad \dot{\varphi}((j+1)\Delta t) := \dot{\varphi}_{j+1} \quad (5.9)$$

Így (5.8) egyenlet alapján a  $(j+1)\Delta t$  időpillanatbeli állapotválasz függvények:

$$\varphi_{j+1} = \operatorname{ch}(\beta\Delta t)\varphi(j) + \frac{1}{\beta}\operatorname{sh}(\beta\Delta t)\dot{\varphi}(j) + \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}(\beta\Delta t) - 1)\mathbf{u}_j \quad (5.10)$$

$$\dot{\varphi}_{j+1} = \beta\operatorname{sh}(\beta\Delta t)\varphi(j) + \operatorname{ch}(\beta\Delta t)\dot{\varphi}(j) + \frac{1}{\beta}\operatorname{sh}(\beta\Delta t)\mathbf{u}_j \quad (5.11)$$

A visszacsatolt rendszerben a beavatkozó jel felírható  $\mathbf{K}_0$  állapot-visszacsatolási mátrix segítségével, amely a szabályozási paraméter konstansokat tartalmazza (3-2. ábra).

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) \quad (5.12)$$

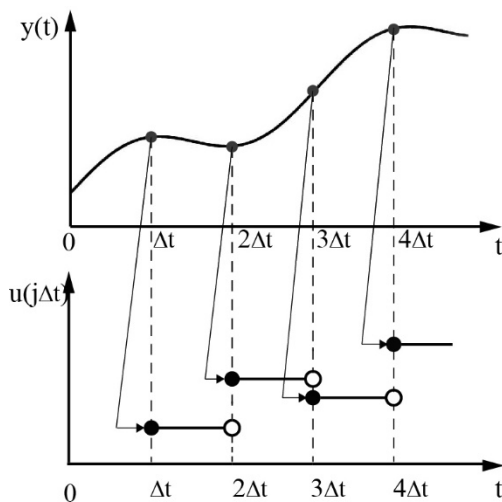
A PD szabályzó esetén az állapot-visszacsatolási mátrix  $k_p$  proporcionális és  $k_d$  derivatív szabályozási paramétereket tartalmazza. Nulladrendű tartó esetén PD szabályzó proporcionális és derivatív tagjai:

$$k_p := k_{p0} \quad \text{és} \quad k_d := k_{d0} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K}_0 := [k_{p0} \quad k_{d0}] \quad (5.14)$$

### 5.1.1 Stabilitásvizsgálat nulladrendű tartó esetén, időkésés nélkül

Időkésés nélküli esetben a beavatkozó jel az adott pillanatbeli állapotvektor felhasználásával van kiszámítva (5-3.ábra).



5-3. ábra. Nulladrendű tartó időkésés nélküli esetben

Időkésés nélküli esetben nulladrendű tartó esetén a szabályozási erő:

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_j \quad (5.15)$$

Nulladrendű időkésés nélküli visszacsatolt rendszer esetén a szabályozási erő felírása:

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_j = -[k_{p0} \quad k_{d0}] \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} = -k_{p0} \varphi_j - k_{d0} \dot{\varphi}_j \quad (5.16)$$

$$\varphi_{j+1} = \text{ch}(\beta \Delta t) \varphi(j) + \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \Delta t) \dot{\varphi}(j) + \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta \Delta t) - 1) u_j \quad (5.17)$$

$$\dot{\varphi}_{j+1} = \beta \text{sh}(\beta \Delta t) \varphi(j) + \text{ch}(\beta \Delta t) \dot{\varphi}(j) + \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \Delta t) u_j \quad (5.18)$$

$$u_j = -k_{p0} \varphi_j - k_{d0} \dot{\varphi}_j \quad (5.19)$$

A szabályzó erő állapotválasz függvényekbe való helyettesítésével az állapotegyenlet diszkrét megfelelője felírható. Az állapotválasz függvények a behelyettesítés után:

$$\varphi_{j+1} = \text{ch}(\beta \Delta t) \varphi(j) + \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \Delta t) \dot{\varphi}(j) + \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta \Delta t) - 1) (-k_{p0} \varphi_j - k_{d0} \dot{\varphi}_j) \quad (5.20)$$

$$\dot{\varphi}_{j+1} = \beta \text{sh}(\beta \Delta t) \varphi(j) + \text{ch}(\beta \Delta t) \dot{\varphi}(j) + \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \Delta t) (-k_{p0} \varphi_j - k_{d0} \dot{\varphi}_j) \quad (5.21)$$

A (5.20-5.21) egyenletek rendezésével az egyenletek mátrixos formában felírhatók: mátrixos felírásával a rendszer (3.4) alakú leírásához jutunk.

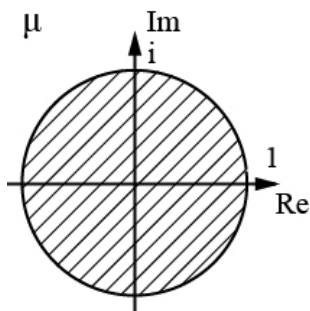
$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_j \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{ch}(\beta\Delta t) - \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta\Delta t) - 1) k_{p0} & \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) - \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta\Delta t) - 1) k_{d0} \\ \beta \text{sh}(\beta\Delta t) - \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) k_{p0} & \text{ch}(\beta\Delta t) - \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) k_{d0} \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

A fenti egyenlet alapján a rendszer  $\mathbf{\Phi}$  átviteli mátrixa időkésés nélküli, nulladrendű tartó esetén másodrendű.

A továbbiakban a rendszer stabilitását rendszer átviteli mátrixára (5.23) vonatkoztatott feltétel alapján vizsgálom a szabályozási paraméterek által meghatározott diszkrét pontokban. A stabil tartomány numerikus úton van meghatározva, a szabályozási paraméterek léptetésével. A numerikus módszer eredményei a stabil tartomány határát képező görbék analitikus meghatározásával ellenőrizhető.

### Stabilitástérkép ábrázolása numerikus módszerrel



5-4. ábra.

Stabilitás diszkrét rendszerénél

Az rendszer stabilitása az átmeneti mátrix sajátértékeinek számításával vizsgálható. Diszkrét idejű LTI rendszer stabilitásának feltétele, hogy a rendszer sajátértékei, a karakterisztikus multiplikátorok az egységkörön belül helyezkedjenek el (5-4. ábra).

A rendszer  $\mu_i$  karakterisztikus multiplikátorai az átmeneti mátrix sajátértékei, az alábbi egyenlet megoldásával számíthatók ki:

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}) = 0 \quad (5.24)$$

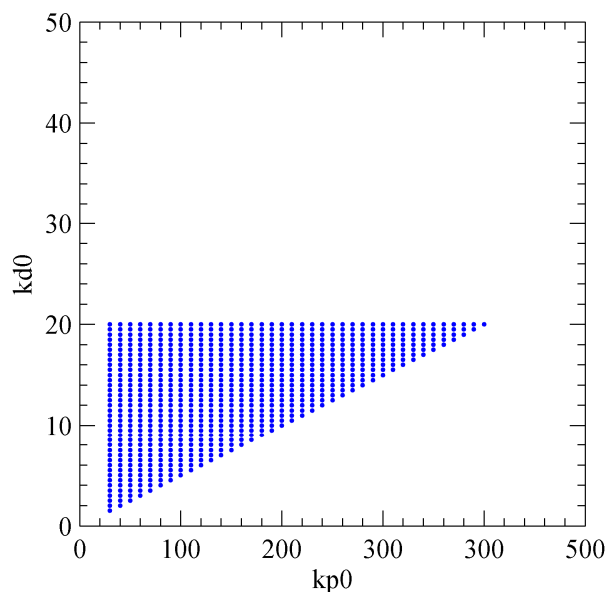
A rendszer stabilitásának változása különböző  $k_{p0}$ ,  $k_{d0}$  nulladrendű erősítési tényezők alkalmazása esetén az erősítési tényezők síkjában felvett stabilitás térképen ábrázolható.

Az erősítési tényezők adott numerikus lépésközzel való léptetésével, az erősítési tényezőket az átviteli mátrixba (5.23) helyettesítve a rendszer stabilitás a diszkrét rendszerre vonatkoztatott stabilitás feltétel (3.9) alapján pontonként vizsgálható.

Az így kapott stabil pontokat az erősítési tényezők által meghatározott síkban ábrázolva a stabil tartomány közelítőleg meghatározható.

A stabil tartományt a fentiek alapján *MATLAB*-ban, két egymásba ágyazott cikluson keresztül,  $k_{p0}$  és  $k_{d0}$  léptetésével határoztam meg. A (3.9) feltétel alapján az erősítési tényező párokra ott adódik stabil pont, ahol átviteli mátrix maximális abszolút értékű sajátértéke egynél kisebb.

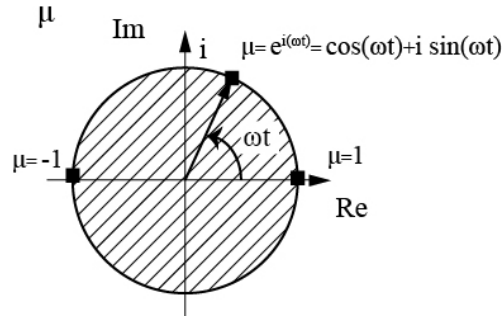
A stabilitást  $k_{p0}$ ,  $k_{d0}$  pontpárokban vizsgálva,  $k_{p0}$  irányban 10 egység,  $k_{d0}$  irányban 0.5 egységnyi lépésközökkel az így kapott stabilitástérkép az 5-5. ábrán látható.



5-5. ábra. Nulladrendű tartó, időkésés nélküli eset (5.23)

### Stabilitáshatárok ábrázolása

A numerikus megoldás helyessége a stabilitáshatárokat meghatározó görbék ábrázolásával ellenőrizhető. A stabilitás térkép numerikus meghatározása a stabilitáshatárokat jelentő görbék analitikus meghatározásával validálható.



5-6. ábra.

Stabilitáshatárok meghatározásához  $\mu$  változó helyettesítési értékei

A  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon a stabilitáshatárokat alkotó görbék meghatározhatók a karakterisztikus polinomból, ha  $\mu$  karakterisztikus multiplikátor helyére az 5-6. ábrának megfelelően  $\mu$  síkbeli stabilitáshatáron felvett értékeit helyettesítjük:

$$\mu = 1 \qquad \mu = -1 \qquad \mu = e^{i(\omega t)} \qquad (5.25)$$

A rendszer sajátértékei az átmeneti mátrix karakterisztikus polinomjából határozhatók meg. A diszkrét rendszer karakterisztikus polinomjának felírása:

$$\begin{aligned} \det(\mu \mathbf{I} - \Phi) = & \mu^2 + \mu \left( \text{sh}(\beta \Delta t) k_{d0} - 2 \text{ch}(\beta \Delta t) + \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta \Delta t) - 1) k_{p0} \right) + \text{ch}^2(\beta \Delta t) + \\ & - \text{sh}^2(\beta \Delta t) - \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \Delta t) \text{ch}(\beta \Delta t) k_{d0} + \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta \Delta t) (\text{ch}(\beta \Delta t) - 1) k_{p0} + \\ & - \frac{1}{\beta^2} \text{ch}(\beta \Delta t) (\text{ch}(\beta \Delta t) - 1) k_{d0} + \frac{1}{\beta^2} \text{sh}^2(\beta \Delta t) k_{p0} = 0 \end{aligned} \qquad (5.26)$$

Az (5.25) helyettesítések elvégzése után stabilitáshatárokat alkotó görbék felvehetők a  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon a (5.23)-ban adott rendszerre.

1.  $\mu = 1$  helyettesítés esetén:

$$\left( \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta\Delta t) - 1) - \frac{1}{\beta^2} \text{ch}(\beta\Delta t) (\text{ch}(\beta\Delta t) - 1) + \frac{1}{\beta^2} \text{sh}^2(\beta\Delta t) \right) k_{p0} + 0k_{d0} = 2 - 2\text{ch}(\beta\Delta t) \rightarrow k_{p0} = \beta^2 = 29.43 \quad (5.27)$$

2.  $\mu = -1$  helyettesítés esetén:

$$\left( -\frac{2}{\beta} \text{sh}(\beta\Delta t) \right) k_{d0} + 0k_{p0} = -2 - 2\text{ch}(\beta\Delta t)$$

$$k_{d0} = \frac{1+\text{ch}(\beta\Delta t)}{\text{sh}(\beta\Delta t)} \beta = 20.49 \quad (5.28)$$

3.  $\mu = e^{i\omega t}$  helyettesítés esetén: (5.29)

A karakterisztikus multiplikátor az egységkör által meghatározott stabilitás határgörbén helyezkedik el.

Az Euler formula szerinti  $\mu = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$  helyettesítés esetén a karakterisztikus polinom valós és képzetes tagjainak szétválasztása után a valós és képzetes tagból képzett kifejezésekre (5.26) egyenlőség külön vizsgálható.

$$\text{Re}\{\det(\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})\} = 0 \quad (5.30)$$

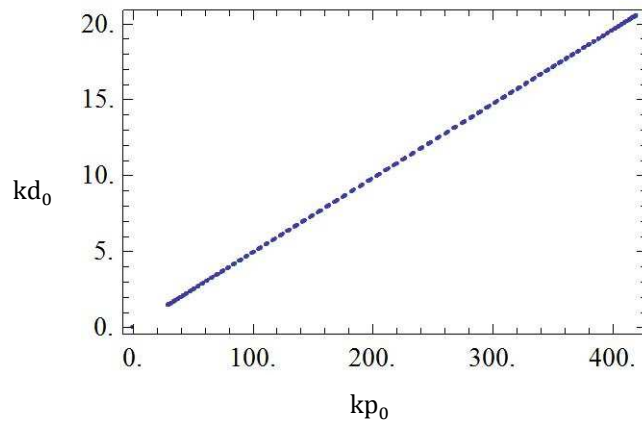
$$\text{Im}\{\det(\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})\} = 0 \quad (5.31)$$

A két egyenletből kifejezhető  $(\omega t)$  függvényében a két szabályozási paraméter a vizsgált rendszerre:

$$k_{d0}(\omega) = 224.59 - 195.16 \cos(\omega) \quad (5.32)$$

$$k_{p0}(\omega) = 10.962 - 9.523 \cos(\omega) \quad (5.33)$$

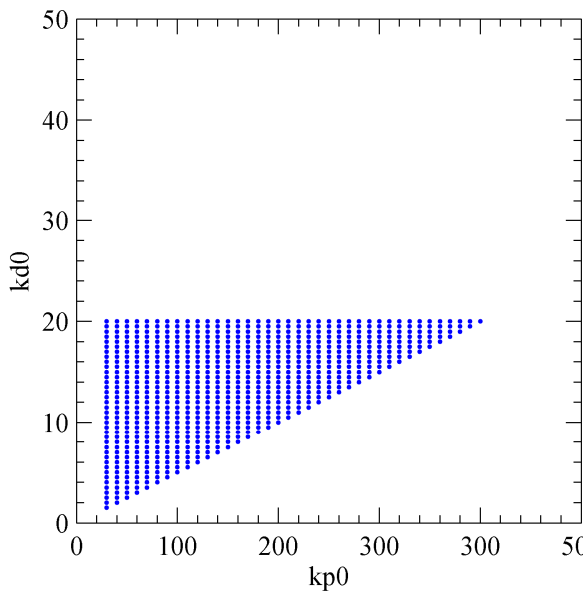
A  $\omega$  körfrekvencia változtatása az egységkörön való szögfordulásnak felel meg, így  $\omega$  léptetése esetén  $k_{p0}(\omega)$  és  $k_{d0}(\omega)$  pontpárok ábrázolásával az egységkörnek megfelelő stabilitáshatár adódik.



5-7. ábra.

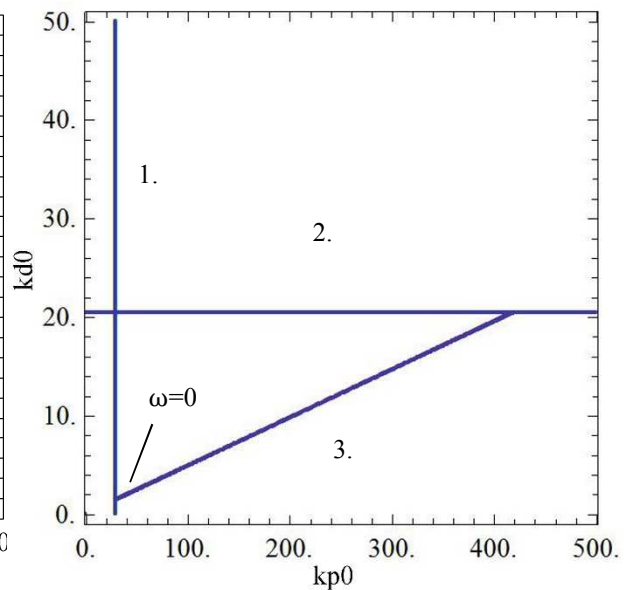
ZOH, időkésés nélküli eset, stabilitáshatár  $\mu = e^{i\omega t}$  esetén

Az 5-7. ábrán a harmadik helyettesítéssel (5.29)  $\omega$  léptetéséből adódó  $k_{p0}(\omega)$  és  $k_{d0}(\omega)$  pontpárok vannak ábrázolva.



5-8. ábra.

Stabilitástérkép numerikusan  
(5.23 mátrix sajátértékei alapján)



5-9. ábra.

Stabilitásgörbék analitikus meghatározás után

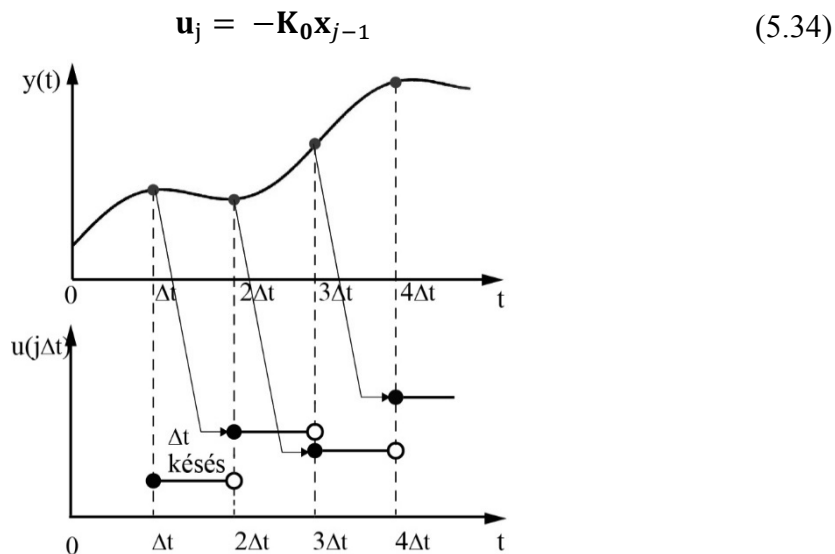
Az 5-9. ábrán a (5.27), (5.28) határoló egyenesek és a (5.32) és (5.33) egyenletekből képzett pontpárok által meghatározott határoló egyenes vannak ábrázolva.

Az 5-8. ábrán a numerikus módszerrel kapott stabilitástérkép látható, az 5-9. ábrán az analitikus megoldással kapott stabilitáshatárok vannak ábrázolva. Látható, hogy a különböző módszerekkel meghatározott stabilitás tartományok megegyeznek.



## 5.1.2 Stabilitásvizsgálat nulladrendű tartó esetén, időkéleltetett rendszer

Ha a rendszer  $\Delta t$  időkést tartalmaz, a beavatkozó jel az egy mintavételezési idővel korábbi állapottal van kiszámítva.



5-10. ábra. nulladrendű tartó időkést tartalmazó rendszer esetén

Ahol  $\mathbf{x}_{j-1}$  a  $t=(j-1)\Delta t$  időpillanatbeli állapotvektor. ( $j \in \mathbb{Z}$ ).

$$\varphi((j-1)\Delta t) := \varphi_{j-1} \quad \dot{\varphi}((j-1)\Delta t) := \dot{\varphi}_{j-1} \quad (5.35)$$

Így a szabályzó erő alakja:

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_{j-1} = -[k_{p0} \quad k_{d0}] \begin{bmatrix} \varphi_{j-1} \\ \dot{\varphi}_{j-1} \end{bmatrix} = -k_{p0} \varphi_{j-1} - k_{d0} \dot{\varphi}_{j-1} \quad (5.36)$$

Az (5.10), (5.11) és (5.36) egyenletek alapján a diszkrét állapotválasz időkést tartalmazó, elsőrendű tartót alkalmazó rendszer esetén mátrixos formában:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \Phi \mathbf{x}_j \quad (5.37)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \\ u_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\beta) & \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta) & \frac{1}{\beta^2} (\text{ch}(\beta) - 1) \\ \beta \text{sh}(\beta) & \text{ch}(\beta) & \frac{1}{\beta} \text{sh}(\beta) \\ -k_{p0} & -k_{d0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \\ u_j \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$= \Phi \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (5.39)$$

### Stabilitástérkép ábrázolása numerikus módszerrel

A késés nélküli esethez hasonlóan  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon a stabilitástérkép ábrázolható, ha adott lépésközzel, paraméter páronként vizsgáljuk a stabilitást. Két egymásba ágyazott cikluson keresztül,  $k_{p0}$  és  $k_{d0}$  léptetésével, az erősítési tényezők átviteli mátrixba (5.39) való helyettesítésével a stabil rendszert adó paraméter párok (3.9) feltétel alapján meghatározhatók. Az így kapott stabil paraméter párokból a stabilitás térkép ábrázolható. A numerikus léptetés mindkét erősítési tényező esetén 0,25 egység nagyságú. Az így kapott stabilitástérkép az 5-12. ábrán látható.

### Stabilitáshatárok ábrázolása

Az időkésés nélküli esethez hasonlóan a stabil tartományt határoló görbék meghatározhatók, ha a karakterisztikus polinomban  $\mu$  karakterisztikus multiplikátor helyére a  $\mu$  sík stabilitáshatárán felvett értékeit helyettesítjük (5-6. ábra).

Az időkésés nulladrendű tartót tartalmazó rendszer diszkrét átmeneti mátrixának karakterisztikus polinomja:

$$\det(\mu\mathbf{I} - \Phi) = \mu^3 - 2\text{ch}(\beta)\mu^2 + \mu\left(1 + \frac{1}{\beta}\text{sh}(\beta)k_{d0} + \frac{1}{\beta^2}(\text{ch}(\beta) - 1)k_{p0}\right) - \frac{1}{\beta}\text{sh}(\beta) + \frac{1}{\beta^2}(\text{ch}(\beta) - 1)k_{p0} = 0 \quad (5.40)$$

1.  $\mu = 1$  helyettesítés esetén a vizsgált rendszerre számítva:

$$2 - 2\text{ch}(\beta) + 2\frac{1}{\beta^2}(\text{ch}(\beta) - 1)k_{p0} = 0 \rightarrow k_{p0} = \beta^2 = 29.43 \quad (5.41)$$

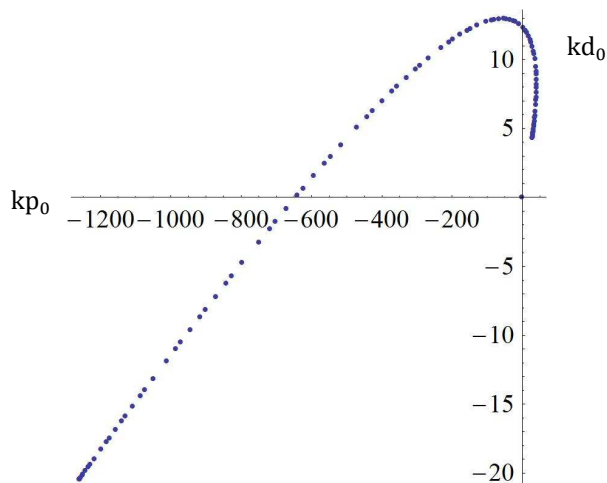
2.  $\mu = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$  helyettesítés esetén a stabilitásgörbe a  $k_{p0}(\omega)$  és  $k_{d0}(\omega)$  pontpárokból ábrázolható, ha  $e^{i\omega t}$  vektort az egységkör mentén forgatjuk  $\omega$  léptetésével.

Az időkésés nélküli esethez hasonlóan a karakterisztikus polinomból a valós és képzetes tagok szétválasztásával kapott egyenletekből (5.30, 5.31) kifejezethetők a nulladrendű erősítési tényezők a körfrekvencia függvényében.

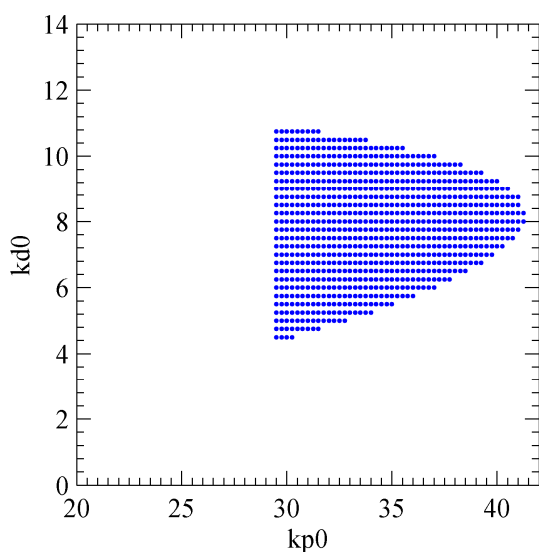
$$k_{p0}(\omega) = -419.769 + 644.37\cos(\omega) - 195.16\cos^2(\omega) + 195.16\sin^2(\omega) \quad (5.42)$$

$$k_{d0}(\omega) = 1.437 + 12.399\cos(\omega) - 9.5257\cos^2(\omega) + 9.5257\sin^2(\omega) \quad (5.43)$$

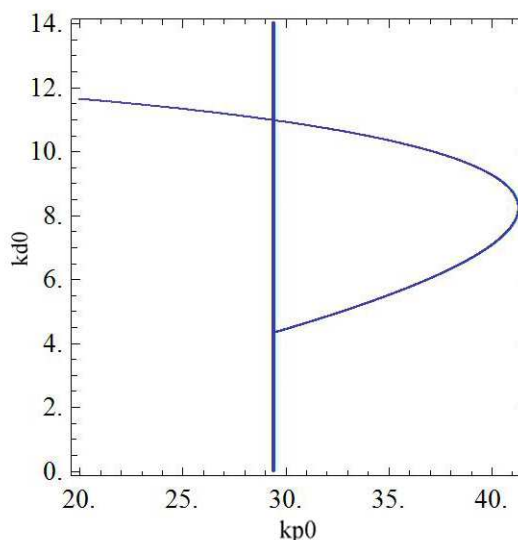
Az (5.42) és (5.43) egyenletekből  $k_{p0}(\omega)$  és  $k_{d0}(\omega)$  pontpárok képezhetők  $\omega$  körfrekvencia léptetésével, amelyeket a  $(k_{p0}, k_{d0})$  síkon ábrázolva a (2). stabilitáshatár kiadódik (5-11.ábra).



5-11. ábra. (5.40) determinánsba  $\mu = e^{i\omega t}$  helyettesítés esetén adódó stabilitás határgörbe

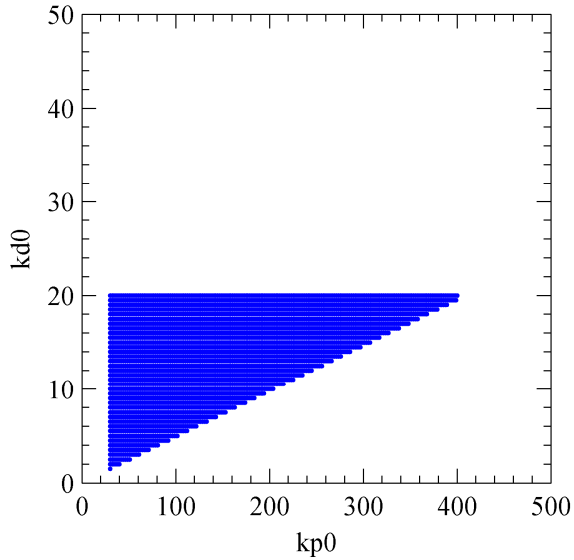


5-12.ábra. ZOH, időkésést tartalmazó rendszer (5.38) numerikusan meghatározott stabilitástérképe (5.36) mátrix sajátértékei alapján

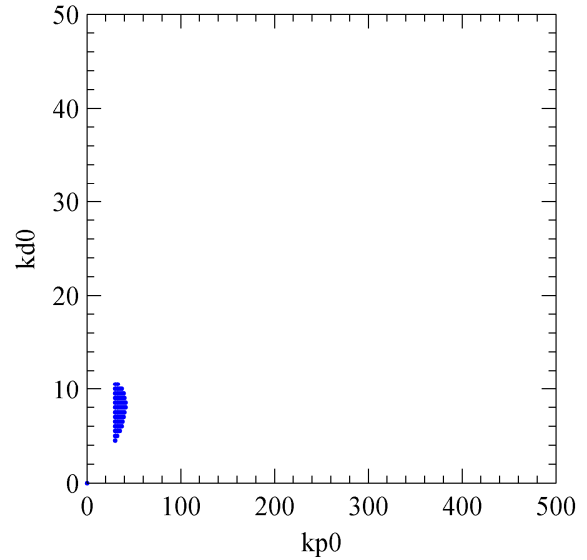


5-13. ábra. ZOH, időkésést tartalmazó rendszer (5.38) esetén határoló görbék ábrázolása analitikus meghatározás után

A 5-13. ábrán az (5.41) határoló egyenes és az (5.42) és (5.43) egyenletekből képzett pontpárok által meghatározott stabilitásgörbe vannak ábrázolva. A 5-12. és 5-13. ábrákon látható, hogy a két különböző módszerrel meghatározott stabilitás tartományok megegyeznek.



5-14. ábra. ZOH, időkézés nélküli rendszer (5.23) stabilitás térképe



5-15. ábra. ZOH, időkézéses rendszer (5.38) stabilitás térképe

A 5-14. és 5-15. ábrákon az időkézés nélküli és az időkézéses nulladrendű tartót alkalmazó rendszer numerikus úton meghatározott stabilitás térképe látható. Látható, hogy  $\Delta t = 0.1s$  időkézés hatására a stabil tartomány jelentősen lecsökken. A stabil tartományok mindkét esetben azonos numerikus lépésközzel voltak meghatározva,  $k_{p0}$  irányban 1,  $k_{d0}$  irányban 0.5 a numerikus lépésköz.

Így időkézés nélküli esetben 7239 stabil pont adódott, időkézés esetén 105, azonos felbontást alkalmazva  $(k_{p0}, k_{d0})$  síkon.

## 5.2 Stabilitás vizsgálat elsőrendű tartó esetén

Első rendű tartó esetén a beavatkozó jel lineárisan változik két mintavételi időpont között (1-5. ábra). Visszacsatolt szabályozás esetén elsőrendű tartót alkalmazva a beavatkozó jel általános alakja a visszacsatolási mátrixokkal megadva:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t)t = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 t) \mathbf{x}(t) \quad (5.44)$$

A fenti kifejezésben  $\mathbf{K}_0$  és  $\mathbf{K}_1$  mátrixok a szabályozási konstansokat tartalmazzák.  $\mathbf{K}_0$  a nulladrendű,  $\mathbf{K}_1$  az elsőrendű szabályozási paramétereket tartalmazó mátrix.

$$\mathbf{K}_0 = [k_{p0} \quad k_{d0}] \quad (5.45)$$

$$\mathbf{K}_1 = [k_{p1} \quad k_{d1}] \quad (5.46)$$

A rendszer állapottér leírása megadható (4.28) és (5.44) egyenletek alapján:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} \quad t \in [t_j, t_{j+1}) \quad (5.47)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{K}_1 t \mathbf{x}(t) \quad (5.48)$$

### 5.2.1 Stabilitásvizsgálat elsőrendű tartó esetén, időkésés nélküli eset

Elsőrendű tartó esetén a késés nélküli állapotválasz:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} (\mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B} \mathbf{K}_1 s \mathbf{x}(t_0)) ds \quad (5.49)$$

A rendszer diszkrétizálható, ha az integrálási intervallum a mintavételezési időnek megfelelően van választva:

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_j \quad (5.50)$$

Mivel a rendszerben nincs időkésés, a beavatkozó jel az adott pillanatbeli állapotvektorból van kiszámítva. A rendszer diszkrét átviteli mátrixa a rendszer diszkrét állapotválaszából (5.50) kifejezhető:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \underbrace{\left( e^{\mathbf{A}\Delta t} + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} \mathbf{K}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \right)}_{\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{x}_j \quad (5.51)$$

$$\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

A stabilitásvizsgálathoz az fenti egyenletbeli integrálok számítása szükséges. Az (5.6) egyenlet alapján:

$$e^{At} \int_0^{\Delta t} e^{-As} ds = e^{At} [-\mathbf{A}^{-1} e^{-As}]_0^{\Delta t} = e^{At} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - e^{-A\Delta t}) \quad (5.52)$$

A (5.51) kifejezés második integrál tagja parciális integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} e^{At} \int_0^{\Delta t} e^{-As} s ds &= e^{At} \left( [-\mathbf{A}^{-1} e^{-As} s]_0^{\Delta t} - \int_0^{\Delta t} -\mathbf{A}^{-1} e^{-As} ds \right) = \\ &= e^{At} \left( -\mathbf{A}^{-1} e^{-A\Delta t} \Delta t + \mathbf{A}^{-2} (\mathbf{I} - e^{-A\Delta t}) \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

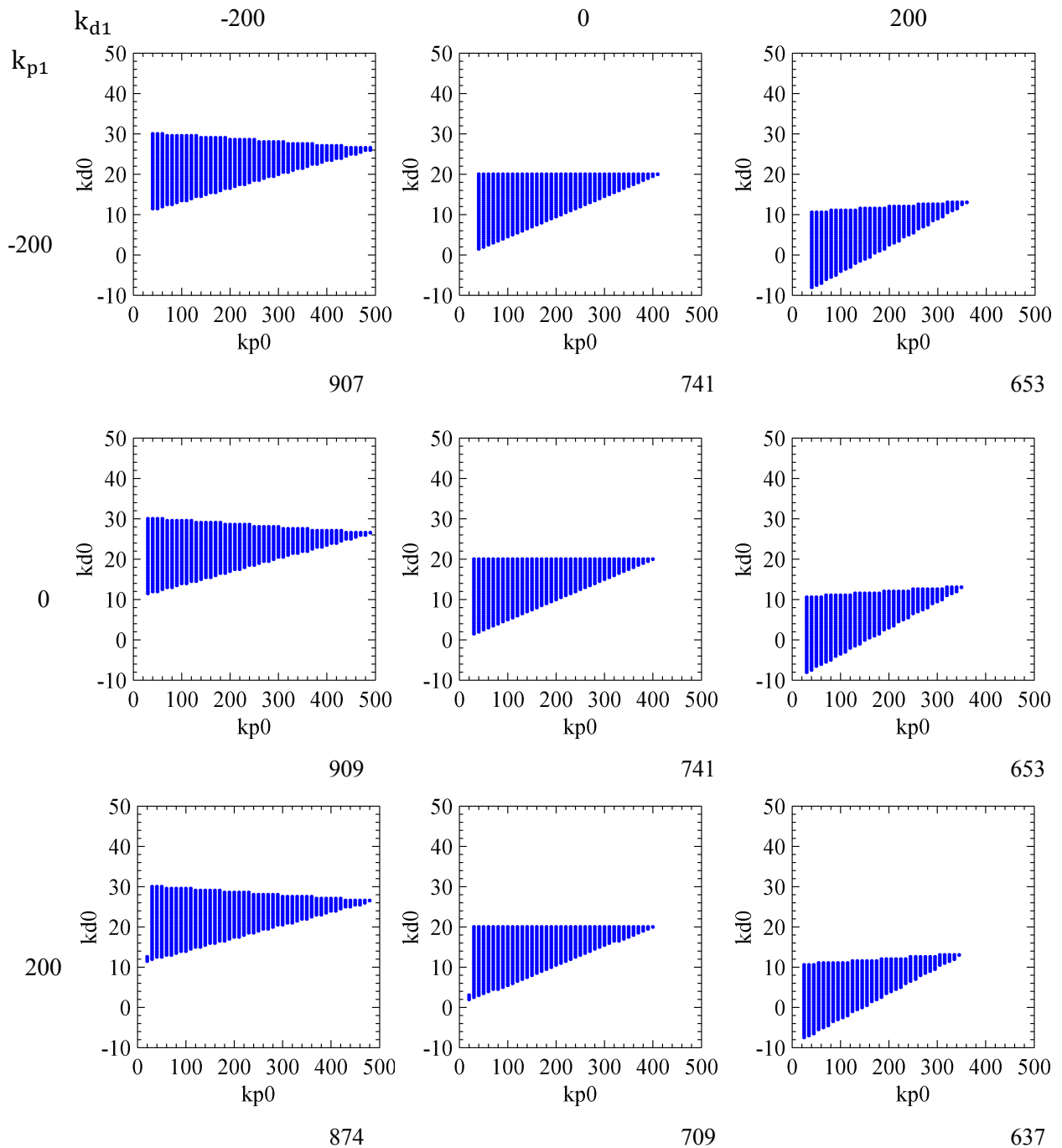
Az (5.6), (5.51), (5.52) egyenletek felhasználásával a diszkrét átviteli mátrix felírható:

$$\Phi = e^{A\Delta t} + e^{A\Delta t} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - e^{-A\Delta t}) \mathbf{B} \mathbf{K}_0 + e^{A\Delta t} (\mathbf{A}^{-2} (\mathbf{I} - e^{-A\Delta t}) - \mathbf{A}^{-1} e^{-A\Delta t} \Delta t) \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \quad (5.53)$$

### A stabilitástérkép meghatározása

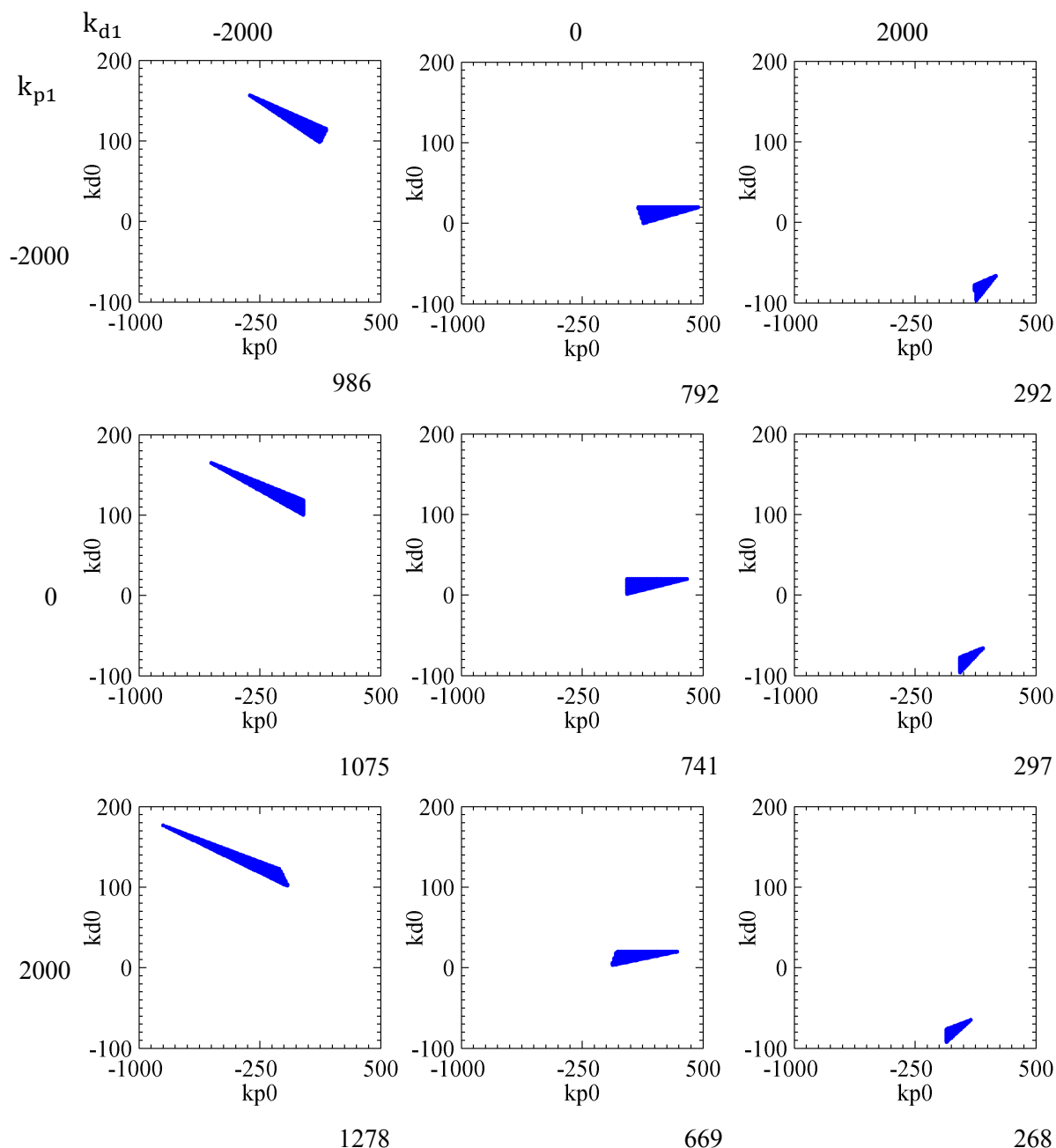
Az (5.48) rendszer aszimptotikus stabilitásának feltétele, hogy az átmeneti mátrix karakterisztikus polinomjának gyökei, a karakterisztikus multiplikátorok az egységkörön belül helyezkedjenek el.

A rendszer stabilitása az átviteli mátrix alapján  $k_{d0}, k_{p0}, k_{p1}, k_{d1}$  szabályozási paraméterek függvényében van meghatározva. A stabilitás térképek a nulladrendű tartó stabilitás vizsgálatához hasonlóan a nulladrendű szabályozási paraméterek síkjában vannak ábrázolva ( $k_{p0}, k_{d0}$ ). Az 5-16. ábrán az elsőrendű szabályozási paraméterek kisebb lépésközzel, az 5-17. ábrán a rendszer dinamikához mérten vannak léptetve.



5-16. ábra: FOH, időkésés nélküli rendszer stabilitástérképei  $k_{p0}$ , és  $k_{d0}$ , irányban azonos numerikus léptetési értékek esetén, (5.53) átviteli mátrix sajátértékei alapján

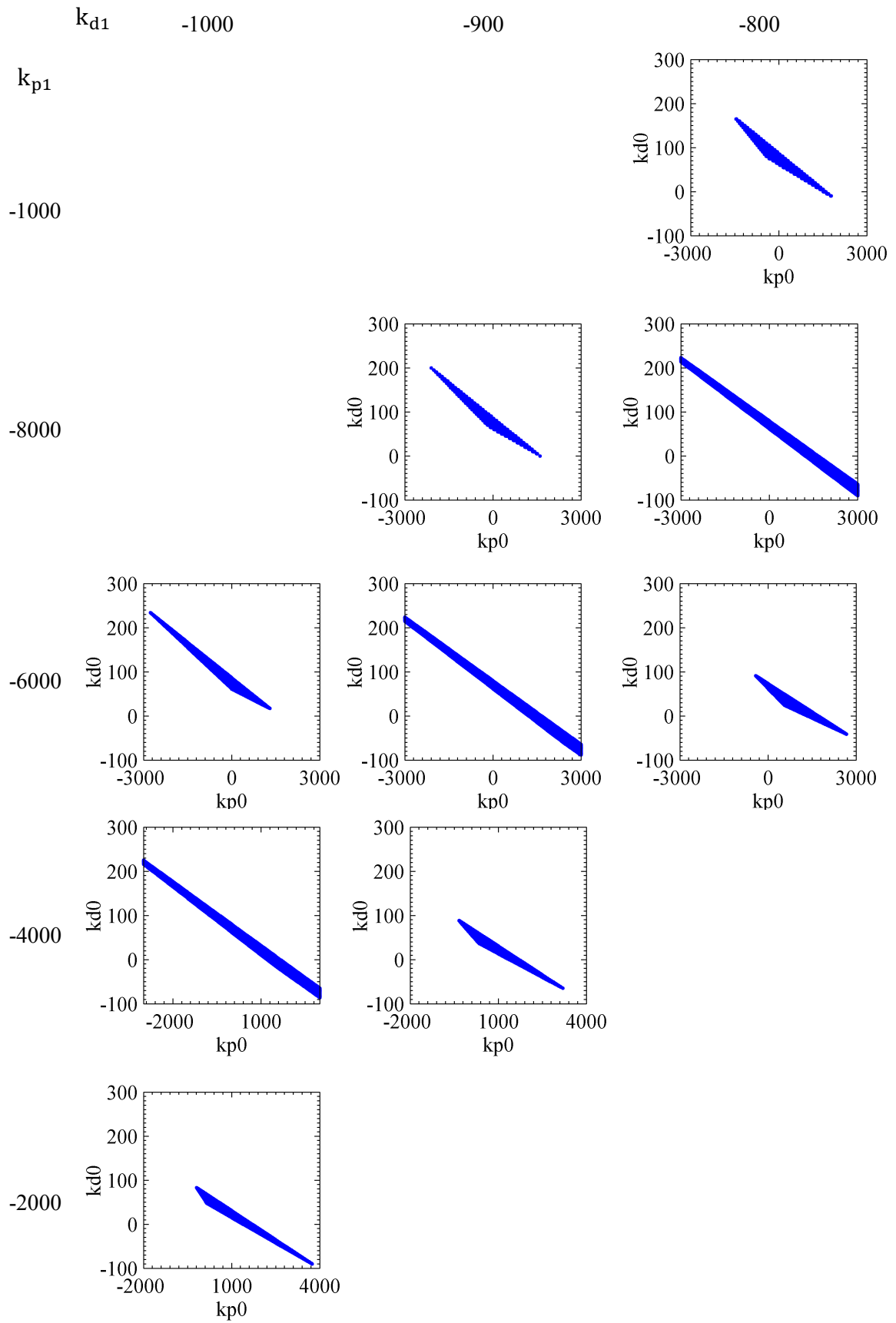
Az 5-16. ábrán a stabil tartomány alakulása látható a  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon az elsőrendű szabályozási paraméterek,  $k_{p1}$  és  $k_{d1}$  200 egységgel pozitív, illetve negatív irányba való léptetése esetén. A  $(k_{p0}, k_{d0})$  síkon a numerikus léptetés nagysága  $k_{d0}$  irányban 0.5 egységnyi,  $k_{p0}$  irányban 10 egységnyi. A stabilitástérképek alatt az adott felbontás melletti stabil pontok száma van feltüntetve. Látható, hogy a nulladrendű tartóhoz képest a stabil tartomány növelhető elsőrendű tartó alkalmazása esetén.



5-17. ábra. FOH, időkézés nélküli rendszer stabilitás térképek, (5.53) sajátértékei alapján

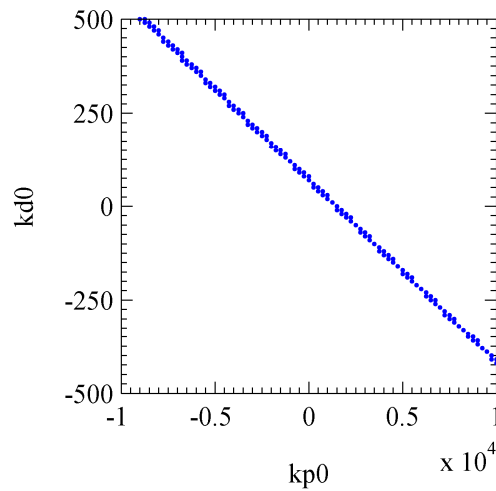
Az 5-17. ábrán a stabil tartomány alakulása látható a  $(k_{d0}, k_{p0})$  paramétersíkon az elsőrendű szabályozási paraméterek  $(k_{d1}, k_{p1})$  2000 egységgel pozitív, illetve negatív irányba való léptetése esetén. A  $(k_{p0}, k_{d0})$  síkon a numerikus léptetés nagysága  $k_{d0}$  irányban 0,5,  $k_{p0}$  irányban 10 egységnyi. Az ábrák alatt az adott numerikus lépésközzel a stabil pontok száma van feltüntetve. Látható, hogy a proporcionális elsőrendű erősítési tényező növelésének és a derivatív csökkentésének hatására a stabilitás tartomány növekszik. Továbbá az is leolvasható, hogy a rendszer érzékenyebb a derivatív elsőrendű erősítési tényező változtatására.





5-18. ábra.FOH, időkézés nélküli rendszer stabilitástérkép, időkézés nélküli eset, (5.53) sajátértékei alapján

A 5-18. ábrán látható, hogy bizonyos elsőrendű szabályozási paraméter párok esetén a stabilitás térkép jelentősen megnő.



5-19. ábra. FOH, időkézés nélküli rendszer stabil tartománya,  
 $k_{d1} = -900$ ;  $k_{p1} = -6300$  erősítési tényezők esetén

Az 5-19. ábrán látható, hogy megfelelő elsőrendű erősítési tényezők alkalmazásával a stabil pont párokat adó szabályozási paraméterek elméletben nagyon nagy határok között mozoghatnak.

### 5.2.2 Stabilitásvizsgálat elsőrendű tartó esetén, időkéleltetett rendszer

Elsőrendű tartó esetén, ha a rendszer  $\Delta t$  időkélelést tartalmaz a beavatkozó jel:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_{j-1} t = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 t) \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.54)$$

Így elsőrendű tartó esetén időkélelésees rendszer esetén az állapotválasz:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} (\mathbf{B}\mathbf{K}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 s) \mathbf{x}_{j-1} ds \quad (5.55)$$

A rendszer diszkretizálása az integrálási határt a mintavételezési időnek megfelelően választva:

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \left( \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}\mathbf{K}_0 + \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B}\mathbf{K}_1 \right) \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{A}_d := e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{B}_{d1} := e^{\mathbf{A}t} \left( \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}\mathbf{K}_0 + \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B}\mathbf{K}_1 \right) \quad (5.58)$$

Így a diszkrét állapotválasz:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_{d1} \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.59)$$

A fenti egyenlet alapján a diszkrét állapotválasz függvény felírható mátrixos formában:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_j \quad (5.60)$$

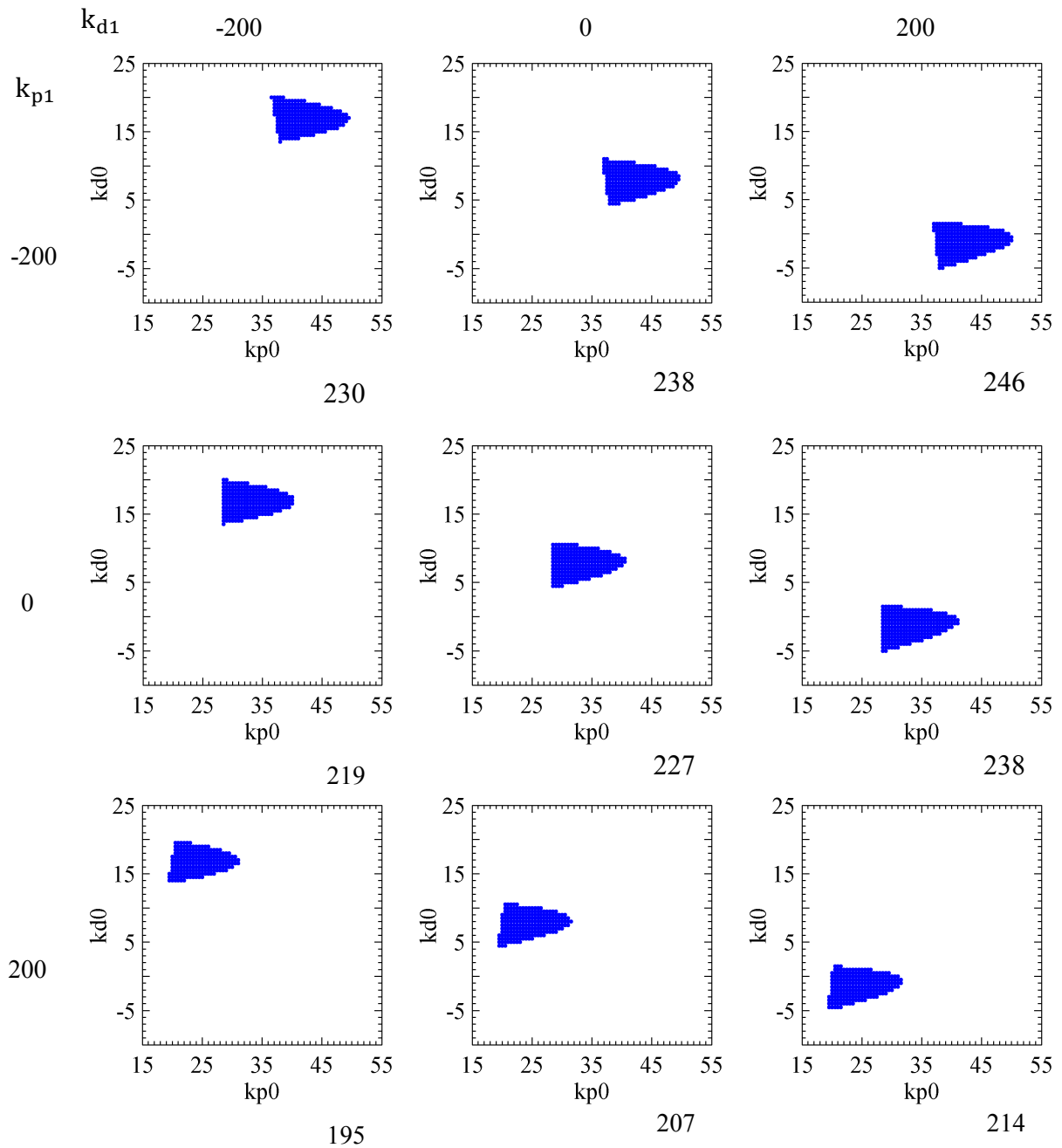
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j+1} \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_{d1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_{j-1} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{:= \mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}}$$

Az átmeneti mátrix sajátértékein keresztül a rendszer stabilitásvizsgálata:

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (5.62)$$

A rendszer stabilitás térképe az eddigiekhez azonos módszerrel van meghatározva.



5-20. ábra. FOH, időkécsést tartalmazó rendszer stabilitás térképe, (5.61) átviteli mátrix sajtértékei alapján

Az 5-20. ábrán a 0.1 s időkécsést tartalmazó rendszer stabil tartományának változása látható elsőrendű tartó esetén az elsőrendű szabályozási paraméterek pozitív és negatív irányban 200 egységgel való léptetésének hatására. A stabil tartomány a  $(k_{d0}, k_{p0})$  paramétersíkon van ábrázolva,  $k_{p0}$  és  $k_{d0}$  paraméterek numerikus lépésköze 0.1 egység. A stabilitás térképek alatt az adott lépésközhöz tartozó stabil pontok száma van feltüntetve. Látható, hogy a nulladrendű tartóhoz ( $k_{p1} = 0, k_{d1} = 0$ ) képest időkécsést tartalmazó rendszer esetén is növelhető a stabil tartomány elsőrendű tartó alkalmazásával.

### 5.3 Stabilitás vizsgálat másodrendű tartó esetén

A rendszer stabilitása tovább növelhető másodrendű tartószerv (second-order hold) alkalmazása esetén. Másodrendű tartó esetén a beavatkozó jel két mintavételi időpillanat között másodfokú parabola.

Visszacsatolt szabályozás esetén másodrendű tartót alkalmazva a beavatkozó jel általános alakja a visszacsatolási mátrixokkal megadva:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1\mathbf{x}(t)t + \mathbf{K}_2\mathbf{x}(t)t^2 = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1t + \mathbf{K}_2t^2)\mathbf{x}(t) \quad (5.63)$$

A fenti kifejezésben  $\mathbf{K}_0$  és  $\mathbf{K}_1$  mátrixok az előző szakaszhoz hasonlóan a nulladrendű és az elsőrendű szabályozási paramétereket tartalmazzák.  $\mathbf{K}_2$  mátrix a másodrendű szabályozási paramétereket tartalmazza:

$$\mathbf{K}_2 := [k_{p2} \quad k_{a2}] \quad (5.64)$$

A rendszer állapotter leírása megadható (4.28) és (5.55) egyenletek alapján:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad t \in [t_j, t_{j+1}) \quad (5.65)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}_1t \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}_2t^2 \mathbf{x}(t) \quad (5.66)$$

#### 5.3.1 Stabilitásvizsgálat másodrendű tartó esetén, időkésés nélküli eset

Időkésés nélküli rendszerben a beavatkozó jel az adott pillanatbeli állapotvektorból van számítva:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_0\mathbf{x}_j + \mathbf{K}_1t\mathbf{x}_j + \mathbf{K}_2t^2\mathbf{x}_j = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1t + \mathbf{K}_2t^2)\mathbf{x}_j \quad (5.67)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} (\mathbf{B}\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B}\mathbf{K}_1s\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B}\mathbf{K}_2s^2\mathbf{x}(t_0)) ds \quad (5.68)$$

A rendszer diszkretizálható, ha az integrálási intervallum a mintavételezési időnek megfelelően van választva:

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}\mathbf{K}_0\mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B}\mathbf{K}_1\mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s^2 ds \mathbf{B}\mathbf{K}_2\mathbf{x}_j \quad (5.69)$$

Az elsőrendű tartóhoz hasonlóan az átviteli mátrix a diszkrét állapotválaszból kifejezhető:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \underbrace{\left( e^{\mathbf{A}\Delta t} + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{BK}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{BK}_1 + e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s^2 ds \mathbf{BK}_2 \right)}_{\Phi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{x}_j \quad (5.70)$$

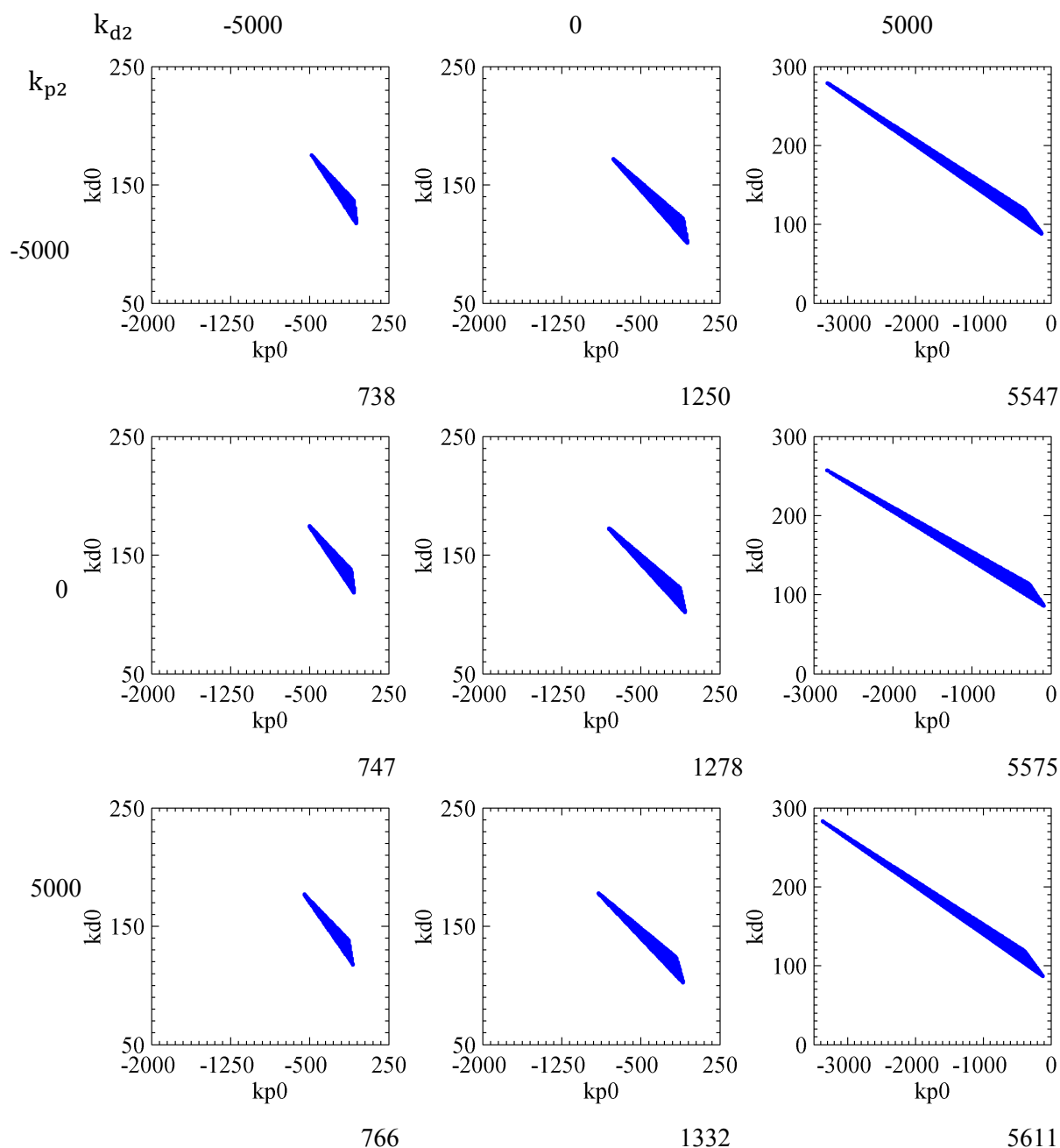
A fenti kifejezés harmadik integrál tagja parciális integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s^2 ds &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \left( [-\mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}s} s^2]_0^{\Delta t} - 2 \int_0^{\Delta t} -\mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}s} s ds \right) = \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \left( -\mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t} \Delta t^2 + 2\mathbf{A}^{-1} (-\mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t} \Delta t + \mathbf{A}^{-2} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}\Delta t})) \right) = \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} (2\mathbf{A}^{-3} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}\Delta t}) - 2\Delta t \mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t} - \Delta t^2 \mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t}) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Az (5.6), (5.52), (5.70) és (5.71) egyenletek felhasználásával az időkésés nélküli, másodrendű tartót alkalmazó diszkrét idejű rendszer átviteli mátrixa kifejezhető:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{\mathbf{A}\Delta t} + e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}\Delta t}) \mathbf{BK}_0 \\ &\quad + e^{\mathbf{A}\Delta t} (\mathbf{A}^{-2} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}\Delta t}) - \mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t} \Delta t) \mathbf{BK}_1 \\ &\quad + e^{\mathbf{A}\Delta t} (2\mathbf{A}^{-3} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}\Delta t}) - 2\Delta t \mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t} - \Delta t^2 \mathbf{A}^{-1} e^{-\mathbf{A}\Delta t}) \end{aligned} \quad (5.72)$$

Az első és nulladrendű tartó stabilitásvizsgálatához hasonlóan a 5-21. ábrán a stabilitástérképek ábrázolása az erősítési tényezők által meghatározott  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon felvett diszkrét pontok (3.9) feltétel alapján történő vizsgálatával történik.



5-21. ábra. SOH, időkésés nélküli rendszer stabilitás térképe, (5.72) mátrix sajátértékei alapján

Az 5-21. ábrán a stabil tartomány alakulása látható időkésés nélküli, másodrendű tartót alkalmazó rendszer esetén a másodrendű erősítési tényezők változtatásának hatására. Az elsőrendű szabályozási paraméterek értéke fix ( $k_{p1} = 2000, k_{d1} = -2000$ ). A stabilitás térkép a  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon van ábrázolva a másodrendű szabályozási paraméterek  $(k_{d2}, k_{p2})$  5000 egységgel pozitív, illetve negatív irányba való léptetése esetén. A  $(k_{p0}, k_{d0})$  síkon a numerikus léptetés nagysága  $k_{d0}$  irányban 0.5,  $k_{p0}$  irányban 10 egységnyi. Az elsőrendű tartóhoz hasonlóan bizonyos szabályozási paraméterek alkalmazása esetén a stabil tartomány jelentősen megnő.

### 5.3.2 Stabilitásvizsgálat másodrendű tartó esetén, időkéleltetett rendszer

Elsőrendű tartó esetén a beavatkozó jel, ha a rendszer  $\tau = \Delta t$  időkéleltést tartalmaz:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_{j-1} t = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 t + \mathbf{K}_2 t^2) \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.73)$$

Így elsőrendű tartó esetén időkéleltéses rendszer esetén az állapotválasz:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} (\mathbf{B}\mathbf{K}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 s + \mathbf{K}_2 s^2) \mathbf{x}_{j-1} ds \quad (5.74)$$

A rendszer diszkrétizálható, ha az integrálási határt a mintavételezési időnek megfelelően választjuk:

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}\Delta t} \left( \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}\mathbf{K}_0 + \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B}\mathbf{K}_1 + \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s^2 ds \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \right) \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.75)$$

$$\mathbf{A}_d := e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad (5.76)$$

$$\mathbf{B}_{d2} := e^{\mathbf{A}t} \left( \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}\mathbf{K}_0 + \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s ds \mathbf{B}\mathbf{K}_1 + \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}s} s^2 ds \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \right) \quad (5.77)$$

Így a diszkrét állapotválasz:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_{d2} \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.78)$$

A fenti egyenlet alapján a diszkrét állapotválasz függvény felírható mátrixos formában:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_j \quad (5.79)$$

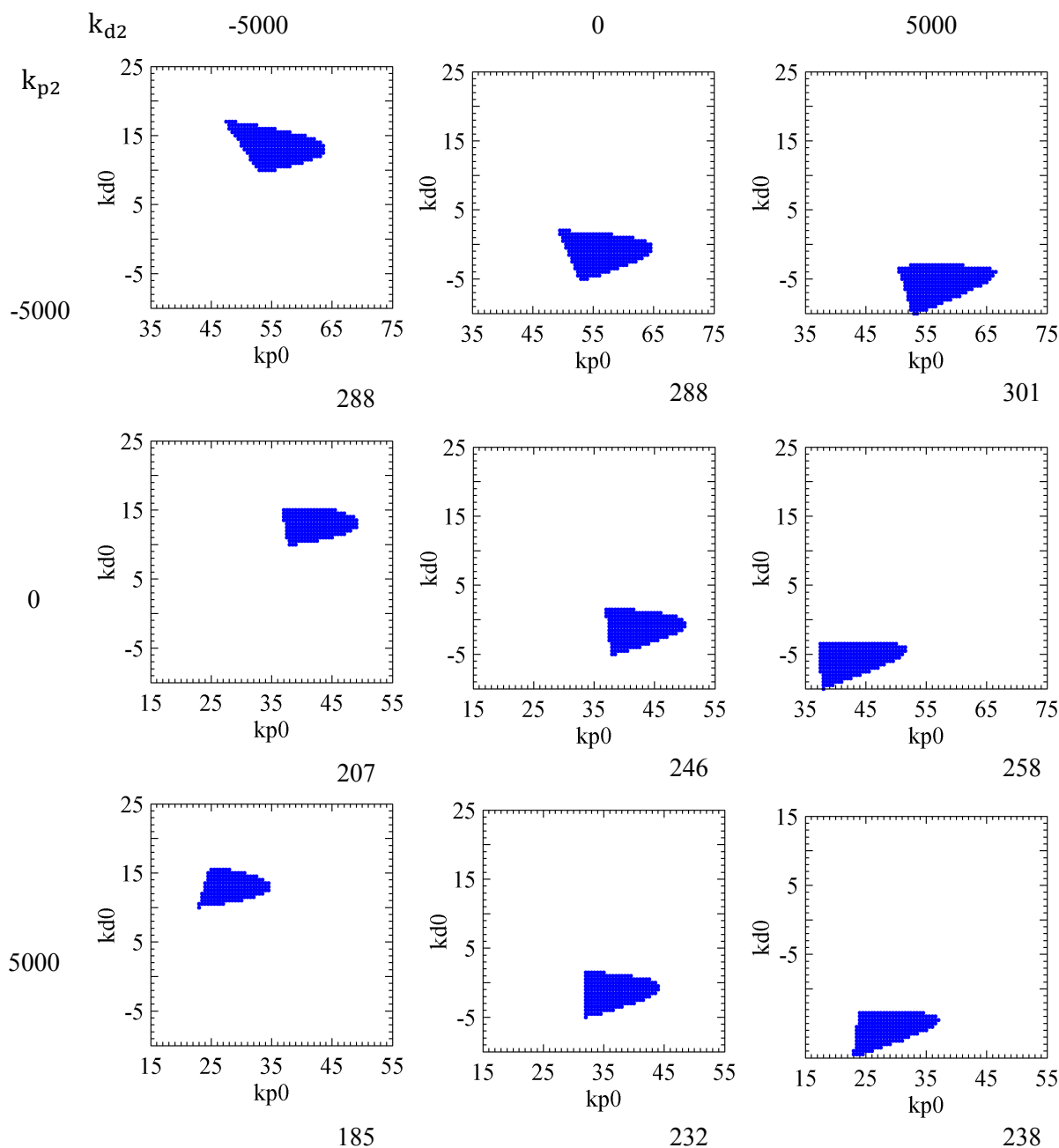
$$\begin{bmatrix} \varphi_{j+1} \\ \varphi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_{d2} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \varphi_{j-1} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}}$$

Az átviteli mátrix sajátértékein keresztül a rendszer stabilitásvizsgálata:

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (5.81)$$





5-22. ábra. SOH, időkésést tartalmazó rendszer stabilitás térképe, (5.80) mátrix alapján

Az 5.22. ábrán a  $\tau = 0.1$  s időkésést tartalmazó rendszer stabil tartományának változása látható másodrendű tartó alkalmazása esetén az elsőrendű szabályozási paraméterek állandó értéken tartása mellett ( $k_{p1} = -200$ ,  $k_{d1} = 200$ ) másodrendű szabályozási paraméterek pozitív és negatív irányban 5000 egységgel való léptetésének hatására. A stabil tartomány a  $(k_{p0}, k_{d0})$  paramétersíkon van ábrázolva, paraméterek numerikus lépésköze 0.1 egység. A stabilitás térképek alatt az adott lépésközhöz tartozó stabil pontok száma van feltüntetve. Látható, hogy az elsőrendű tartóhoz képest a stabil tartomány növelhető másodrendű tartó alkalmazása esetén időkéséses esetben is.

## 5.4 Stabilitás vizsgálat rendszerhez illesztett tartó esetén

A rendszerhez illesztett tartó (system-matched hold - SMH) az általánosított tartószerv egy speciális változata. A rendszerhez illesztett tartó működésének alapja, hogy a két mintavételezési pont között a rendszer dinamikája alapján meghatározott tartó függvény adja a beavatkozó jelet, szemben a hagyományos tartószervekkel, ahol vagy állandó értéken van tartva az előző időpillanatbeli beavatkozó jel (ZOH) vagy az előző állapotok felhasználásával meghatározott  $n$ -ed rendű polinom a beavatkozó jel (FOH, SOH) [7].

Tehát az általánosított tartószervet alkalmazó irányítási rendszer sajátossága, hogy a tervezési változók egyike maga a tartó függvény, szemben a hagyományos módszerekkel, ahol csak a kompenzátor változói, pl. az erősítési tényezők állíthatók.

Nulladrendű és elsőrendű tartó esetén a beavatkozó jel:

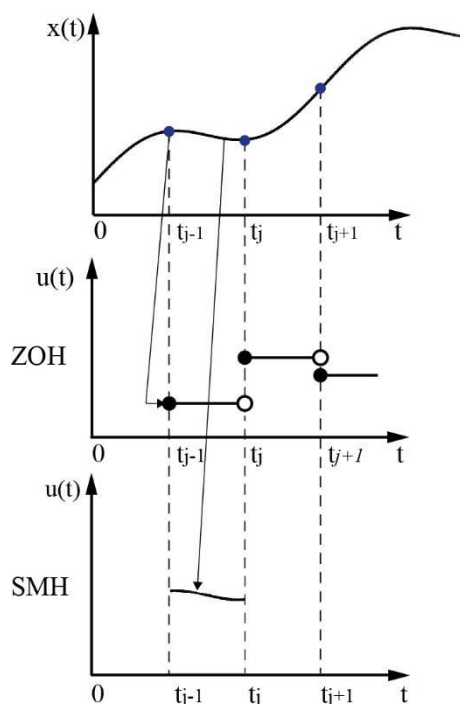
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}_j \quad (5.82)$$

$$\mathbf{u}(t) = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 t)\mathbf{x}_j \quad (5.83)$$

Rendszerhez illesztett tartó esetén a beavatkozó jel:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j \quad (5.84)$$

ahol  $\mathbf{F}(t)$  a tartó függvény.



5.23. ábra. beavatkozó jel ZOH és SMH esetén

#### 5.4.1 A tartó függvény meghatározása rendszerhez illesztett tartó esetén

Rendszerhez illesztett tartó esetén tehát a cél az, hogy a beavatkozó jelben szereplő  $\mathbf{F}(t)$  függvény olyan legyen, hogy két mintavételezési időpont között a tartás jelleg eltűnjön a szabályozási rendszerből, a szabályzó függvény pontosan kövesse az állapotvektor változásait.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j \quad (5.85)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (5.86)$$

A tartó függvény kifejezhető az állapotegyenlet (2.2) felírásán keresztül:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (5.87)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j = \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (5.88)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j \quad (5.89)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j \quad (5.90)$$

$$\left(\dot{\mathbf{F}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{F}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{F}(t)\right)\mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{x}_j \neq \mathbf{0} \quad (5.91)$$

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{F}(t) \quad (5.92)$$

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{F}(t) \quad (5.93)$$

Az (5.93) homogén mátrix differenciálegyenlet megoldása próbafüggvénnyel:

$$\mathbf{F}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{F}(0) \quad (5.94)$$

A fenti egyenlet alapján a rendszerhez illesztett tartó esetén a beavatkozó jel  $\mathbf{F}(t)$  tartófüggvénnyel diszkrét idejű szabályozás esetén felírható:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_j = \mathbf{K}e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}_j \quad (5.95)$$

Így a rendszerhez illesztett tartót alkalmazó szabályozási rendszer állapotegyenlete:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}_j \quad (5.96)$$

Ahol  $\mathbf{K}$  mátrix a proporcionális és derivatív erősítési tényezőket tartalmazza:

$$\mathbf{K} := [k_p \quad k_d] \quad (5.97)$$

### 5.4.2 Stabilitásvizsgálat időkésés nélküli rendszer esetén

A diszkrét rendszer stabilitása a diszkrét állapotválasz felírása után vizsgálható. Rendszerhez illesztett tartó esetén a diszkrét állapotválasz felírása:

$$\mathbf{x}(\Delta t) = e^{A\Delta t} \mathbf{x}(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \quad (5.98)$$

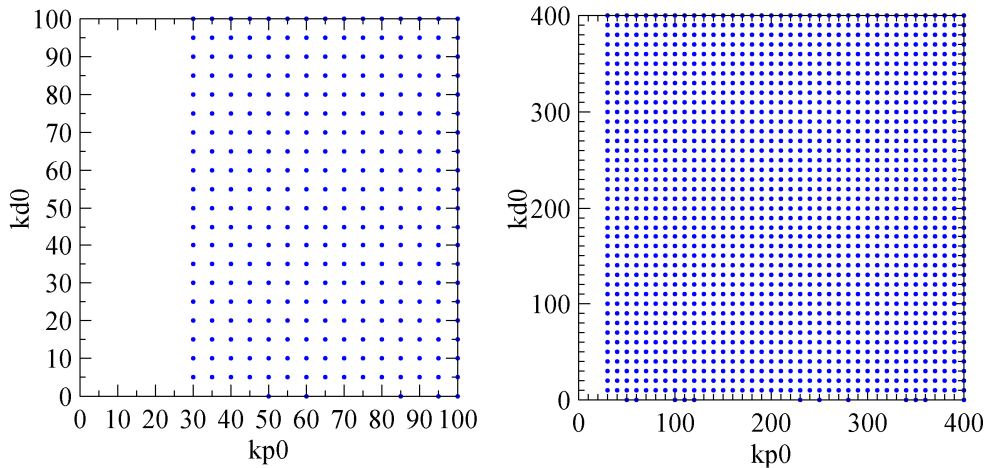
$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_j + e^{At} \int_0^{\Delta t} e^{-As} \mathbf{B}\mathbf{K} e^{(A+\mathbf{B}\mathbf{K})s} ds \mathbf{x}_j \quad (5.99)$$

A fenti egyenletből a diszkrét rendszer  $\Phi$  átviteli mátrixa kifejezhető:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \Phi \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \underbrace{\left( e^{A\Delta t} + e^{A\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-As} \mathbf{B}\mathbf{K} e^{(A+\mathbf{B}\mathbf{K})s} ds \right)}_{:= \Phi} \mathbf{x}_j \quad (5.100)$$

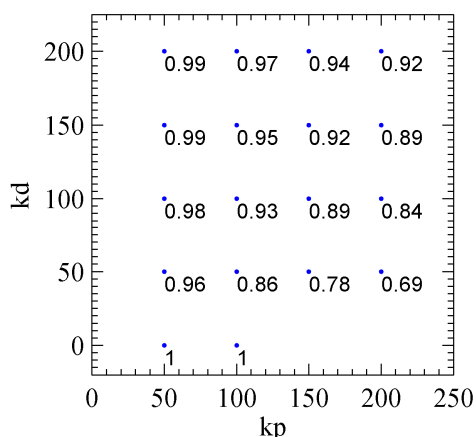
A  $\Phi$  átviteli mátrix sajátértékei alapján a diszkrét rendszer stabilitása a mátrix sajátértékeire vonatkozó (3.9) feltétel alapján vizsgálható.



5-24. ábra.

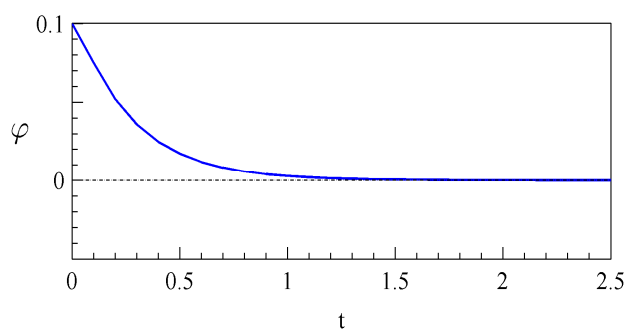
Stabil tartomány az erősítési tényezők függvényében SMH-t alkalmazó (5.99) rendszer esetén, időkésés nélküli rendszer

Az 5-24. ábrán az időkésés nélküli vizsgált rendszer stabilitástérképe látható rendszerhez illesztett tartó alkalmazásával. A bal oldali ábrán 10-es lépésközzel 100-as skálán, a jobb oldali ábrán 400-as skálán van ábrázolva a stabilitás térkép. Látható, hogy az erősítési tényezők síkjában a stabil pontok negyed síkban helyezkednek el, a stabil tartomány végtelenné válik.



5-25. ábra.

(5.99) rendszer stabilitás térképe maximális sajátértékei megjelenítésével



5-26. ábra.

(5.99) rendszer beállása 0.1 rad egyensúlyi helyzettől való kitérés esetén ( $k_d = 50, k_p = 200$ )

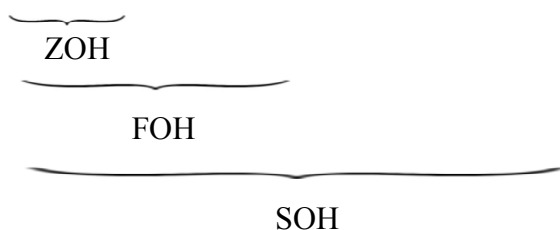
Az 5-25. ábrán  $k_p$  és  $k_d$  erősítési tényezők 50 egységgel való léptetéséből adódó stabilitástérkép látható. Az 5-25. ábrán a stabil pontok mellett az adott erősítési tényezőkhoz tartozó átviteli mátrix maximális abszolút értékű sajátértéke van feltüntetve. A stabil tartományt jelentő negyed sík (5-24. ábra) egy részének ábrázolásával látható, hogy a biztosabb működést jelentő alacsonyabb maximális sajátértékek a proporcionális erősítési tényező növelése mellett a derivatív erősítési tényező alacsony értéken tartásával érhető el. Az 5-26. ábrán a rendszer beállása látható az egyensúlyi helyzettől 0.1 rad-dal való kitérés esetén  $k_d = 50, k_p = 200$  erősítési tényezők esetén.

### A rendszerhez illesztett tartó összehasonlítása az n-ed rendű tartószervvel

A rendszerhez illesztett tartó esetén a beavatkozó jelben (5.95) szereplő exponenciális tag Taylor-sorát kifejtve, a kapott kifejezés az n-ed rendű tartószervekkel hasonlítható össze a Taylor-sor első n tagjának vizsgálatával.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}e^{(\tilde{\mathbf{A}}+\mathbf{BK})t}\mathbf{x}_j \tag{5.101}$$

$$\mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BK})t} = \mathbf{KI} + \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{BK})\mathbf{I}t + \frac{1}{2}\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{BK})^2\mathbf{I}t^2 \tag{5.102}$$



,ahol  $\mathbf{I}$  az egységmátrix.

~ ZOH

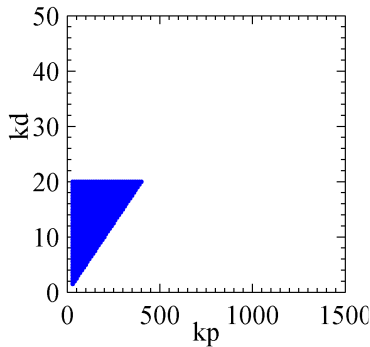
~ FOH

~ SOH

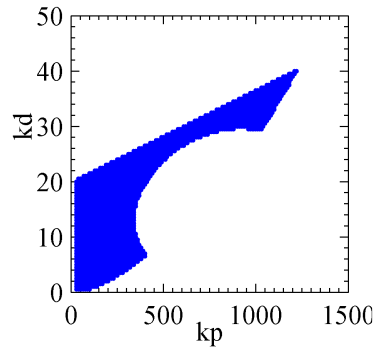
$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BK})t} \cong \mathbf{K}\mathbf{I} \quad (5.103)$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BK})t} \cong \mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{I}t \quad (5.104)$$

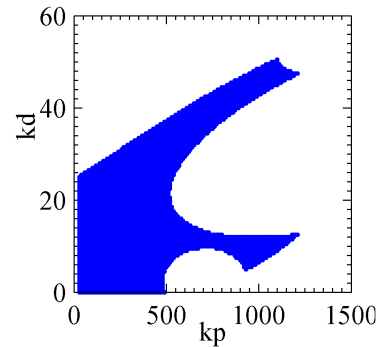
$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BK})t} \cong \mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{I}t + \frac{1}{2}\mathbf{K}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^2\mathbf{I}t^2 \quad (5.105)$$



(5.114) alapján beavatkozó jel



(5.115) alapján beavatkozó jel



(5.116) alapján beavatkozó jel

5-27.ábra. stabilitástérképek SMH tartó esetén a beavatkozó jel különböző fokú Taylor sor közelítésével

Az 5-27. ábrán a beavatkozó jel exponenciális tagjának nulladfokú, elsőfokú és másodfokú Taylor-sorral való közelítése esetén adódó stabilitástérképek láthatók. A stabilitástérképek az eddigiekhez hasonlóan a különböző erősítési tényező párokhoz tartozó átviteli mátrix sajátértékei alapján meghatározott stabil pontokból van meghatározva. A numerikus lépésköz  $k_p$  irányban 10 egység,  $k_d$  irányban 0.5 egység nagyságú. Az 5-27. ábrán is látható, hogy nulladrendű Taylor közelítéssel (5.103 beavatkozó jel) a nulladrendű tartóval azonos stabilitástérkép adódik (5-5. ábra).

### 5.4.3 Stabilitásvizsgálat időkésést tartalmazó rendszer esetén

Rendszerhez illesztett tartó esetén, ha a rendszer  $\Delta t$  időkésést tartalmaz a beavatkozó jel:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}_{j-1} = \mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}_{j-1} \quad (5.106)$$

A fenti egyenlet felhasználásával rendszerhez illesztett tartót alkalmazó, időkéséses rendszer esetén a rendszer állapotválasza felírható:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})s} \mathbf{x}_{j-1} ds \quad (5.107)$$

A fenti egyenlet alapján a rendszer az eddigiekhez hasonlóan diszkrétizálható a mintavételezési időnek megfelelően:

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_j + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{B}\mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})s} ds \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.108)$$

$$\mathbf{A}_d := e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad (5.109)$$

$$\mathbf{B}_{ds} := e^{\mathbf{A}\Delta t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{B}\mathbf{K}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})s} ds \quad (5.110)$$

Így a diszkrét rendszer állapotegyenlete:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_{ds} \mathbf{x}_{j-1} \quad (5.111)$$

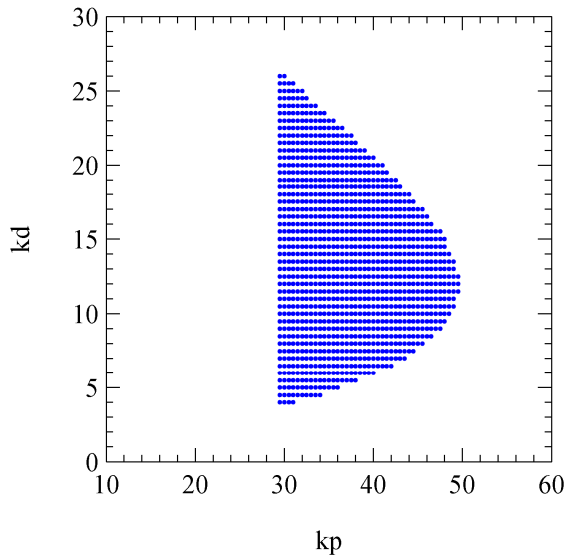
A fenti egyenlet alapján a diszkrét rendszer stabilitás vizsgálatához szükséges differencia egyenlete felírható mátrixos alakban:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_j \quad (5.112)$$

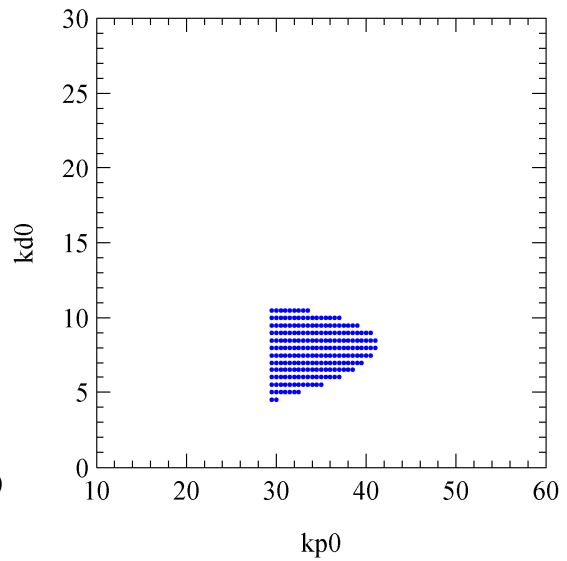
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j+1} \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_{ds} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_{j-1} \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{:= \mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}}$$

A  $\mathbf{\Phi}$  átviteli mátrix sajátértékeinek vizsgálatával a rendszer aszimptotikus stabilitása meghatározható (3.9) feltétel alapján.



5-28. ábra. Időkéséses, SMH-t alkalmazó rendszer stabilitása, (5.108) rendszer



5-29. ábra. Időkéséses, ZOH-t alkalmazó rendszer stabilitása, (5.38) rendszer

Az 5-28. ábrán a  $\Delta t = 0.1$  s, egy mintavételezési időnek megfelelő időkésést tartalmazó, SMH tartót alkalmazó rendszer stabilitás térképe látható  $k_p, k_d$  erősítési tényezők síkjában. Látható, hogy az időkésés jelenléte a rendszerben SMH tartó esetén is a stabil tartomány jelentős csökkenéséhez vezet. Az időkésés nélküli esetben jellemző végtelen negyed sík stabil tartomány véges tartománnyá szűkült össze.

A nulladrendű tartóhoz képest azonban még időkéséses esetben is nagyobb az erősítési tényezők síkjában felvett stabil tartomány (5-29. ábra).



#### 5.4.4 Érzékenység paraméter bizonytalanságra

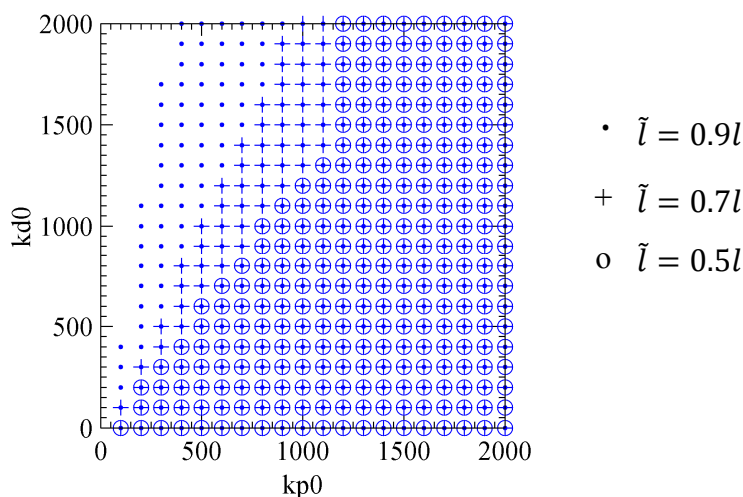
A vizsgált szabályozandó rendszert fizikai jellemzőinek leírásra szolgáló paraméterekben fellépő bizonytalanság hatását vizsgálom a szabályzó rendszer stabilitására időkésés nélküli esetben.

A beavatkozó jelben (5.95) szereplő  $\mathbf{A}$  rendszer mátrix a rendszer paraméteres adatait tartalmazza. A modellben használt rendszert leíró paraméterek azonban általában nem egyeznek meg a szabályozandó rendszer valós fizikai értékével, így  $\mathbf{A}$  mátrixban paraméter bizonytalanságok jelennek meg. A paraméter bizonytalanságok leírására  $\tilde{\mathbf{A}}$  mátrix kerül bevezetésre. A vizsgált fordított inga esetén a rúd hosszban jelentkező pontatlanságot/bizonytalanságot jelenti.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}e^{(\tilde{\mathbf{A}}+\mathbf{BK})t}\mathbf{x}_j \quad (5.114)$$

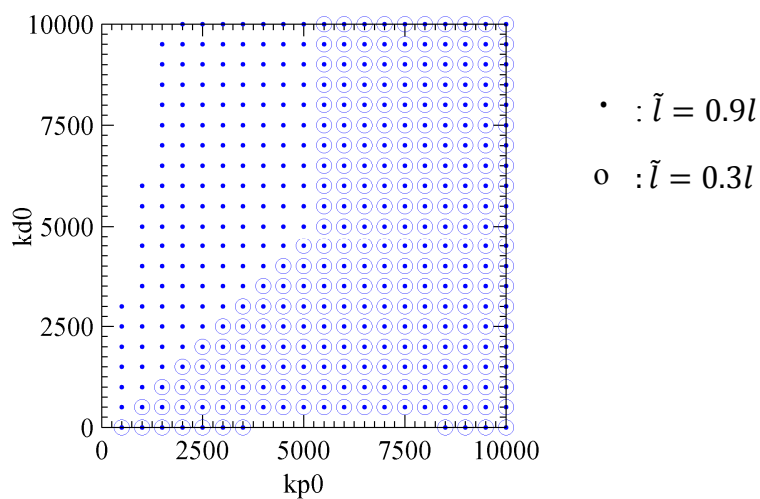
$$\tilde{l} \neq l \quad \tilde{l} = \frac{1}{k} \cdot l \quad (5.115)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k \cdot \beta^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6g}{\tilde{l}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.116)$$



5-30. ábra. SMH, paraméter bizonytalanságok hatása a stabil tartományra (5.98) rendszer esetén

A 5-30. ábrán látható, hogy a rúd hosszban jelentkező paraméter pontatlanságok a stabil tartomány csökkenéséhez vezet



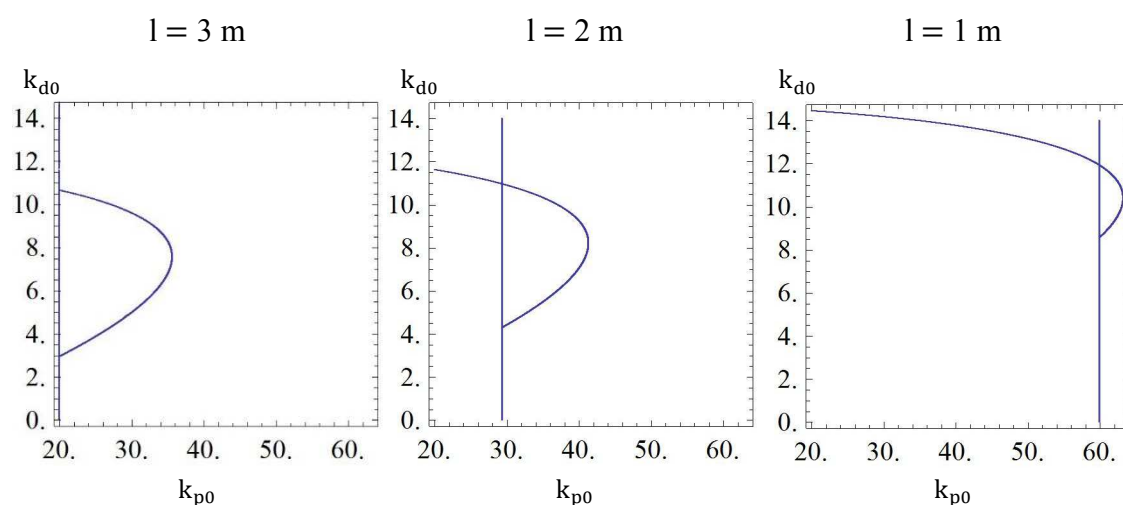
5-31. ábra

SMH, paraméter bizonytalanságok hatása a stabil tartományra (5.98) rendszer esetén

## 6. fejezet

### Stabilitásvesztés adott időkézés esetén – kritikus rúd hossz

Ha a rendszer nem tartalmaz időkézést, a stabil tartomány adott mintavételezési idő alkalmazásával a rúd hossz csökkentésével sem tűnik el. Ezzel szemben, ha a rendszer időkézest tartalmaz, létezik egy olyan kritikus rúd hossz, amelynél kisebb rudat az adott időkézés esetén már nem lehet egyensúlyozni, a stabil tartomány megszűnik. Tehát nem létezik olyan  $k_p$  és  $k_d$  erősítési tényező pár, amivel a rendszer stabil helyzetbe hozható.



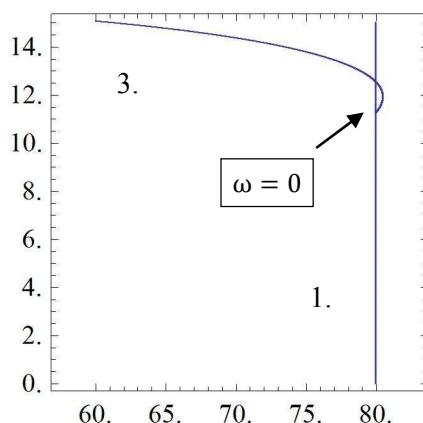
6-1. ábra. ZOH, stabil tartomány változása hosszváltozással  $t=0.1$  s időkézés esetén

A 6-1. ábrán a  $\tau = 0.1$  s időkézést tartalmazó rendszer stabil tartományának megszűnése látható a rúd hosszának csökkentésekor, nulladrendű tartó alkalmazása esetén. Ez az időkézés megfelel az emberi időkézésnek, amely kortól és egyéb tényezőktől függően  $0,1 \sim 0,2$  s körül van a kartól a szemekig. A vizsgált rendszerrel ellentétben az emberi egyensúlyozás analóg működésűnek tekinthető. Analóg esetben a kritikus időkézés (6.1) szerint számítható [8]:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{3g}} \rightarrow l = \tau^2 3g \approx 0.2943 \text{ [m]} \quad (6.1)$$

Tehát analóg szabályozású rúdegyensúlyozásnál  $\tau = 0.1$  s reflexkéséssel/ időkézéssel számolva a legrövidebb kiegyensúlyozható rúd hossz  $0.2943$  m.

A vizsgált diszkrét idejű rendszer (5.38) esetén a legrövidebb, még kiegyensúlyozható rúd hossza a stabilitásgörbék vizsgálatával kiszámítható. Ha a (5.42, 5.43) pontpárokból képzett (3.) stabilitásgörbe nem metszi az (1.) stabilitáshatárt jelentő egyenest (5.37), a stabil tartomány eltűnik, a rúd nem egyensúlyozható ki (6-2.ábra).



6-2.ábra. Kritikus rúdhossz számítása

Így a (5.38) kifejezés deriváltjával a kritikus rúdhossz kiszámítható:

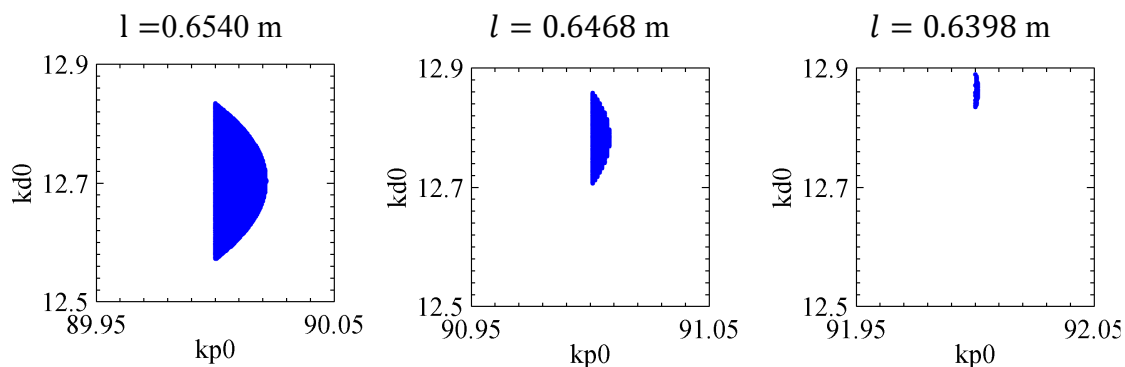
$$k_{p0}(\omega) = -\frac{\beta^2(2\cos(\omega t) - 1)(\cos(\omega t) - \cosh(\beta t))}{\cosh(\beta t) - 1} \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{d\omega} k_{p0}(\omega) = -\frac{1}{2}t \cdot \beta^2(1 - 4 \cdot \cos(\omega t) + 2\cosh(\beta t)) \frac{1}{\sinh^2 \frac{\beta t}{2}} \sin(\omega t) \quad (6.3)$$

$$\frac{d}{d\omega} k_{p0}(0.001) = -10^{-5}\beta^2(-1.5 + \cosh(0.1\beta)) \frac{1}{\sinh^2(0.05\beta)} = 0 \quad (6.4)$$

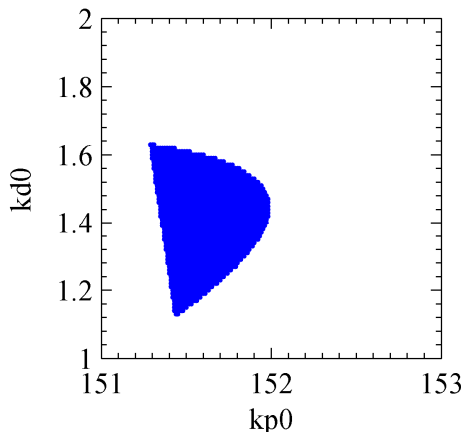
$$\beta = 9.6242 \rightarrow \beta^2 = 92.6259 \rightarrow l = \frac{6g}{\beta^2} \approx 0.6355 \text{ m} \quad (6.5)$$

Tehát a vizsgált fordított inga egyensúlyozási problémánál a digitális esetben a legkisebb kiegyensúlyozható rúdhossz (6.5) a duplájára nőtt az analóg esethez képest (6.1) abban az esetben, ha egy mintavételezési időnyi késés van a rendszerben.



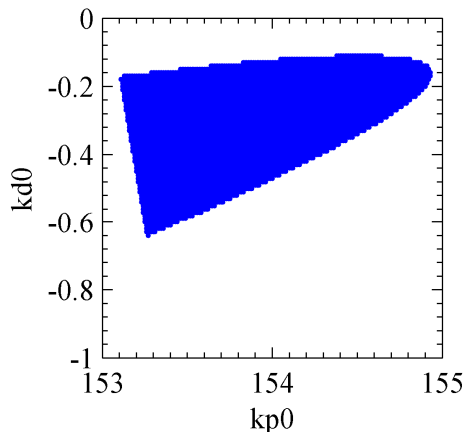
6-3. ábra. stabil tartomány eltűnése  $t=0.1$  időkézés esetén rúd hossz csökkentésével

A 6-3. ábrán a kiszámolt kritikus rúd hosszánál (0.6355 m) vizsgáltam a stabil tartomány eltűnését. Elsőrendű tartó alkalmazása esetén a stabil tartomány növelhető (5.2.2 fejezet), ezért a 0.1 s időkézéshez tartozó kritikus rúd hosszánál rövidebb rudak egyensúlyozhatóságát is vizsgáltam.



6-4. ábra.

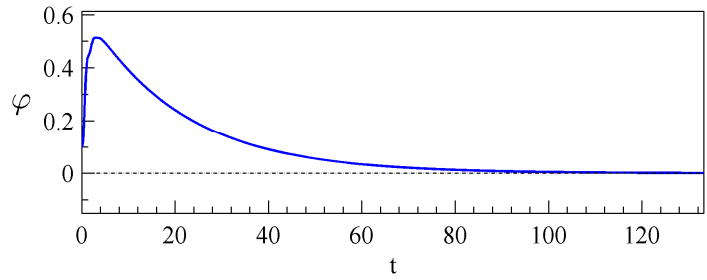
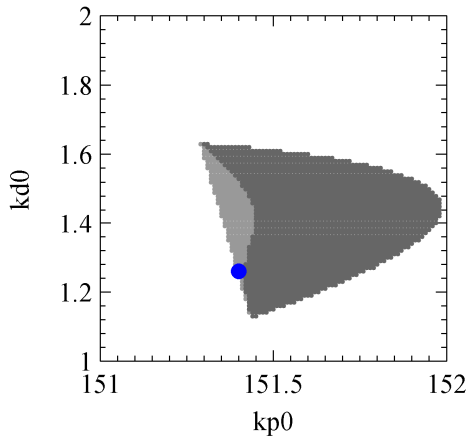
Stabil tartomány FOH tartó,  $l=0.44$  m hosszú rúd,  $\tau = 0.1$  s időkézés esetén



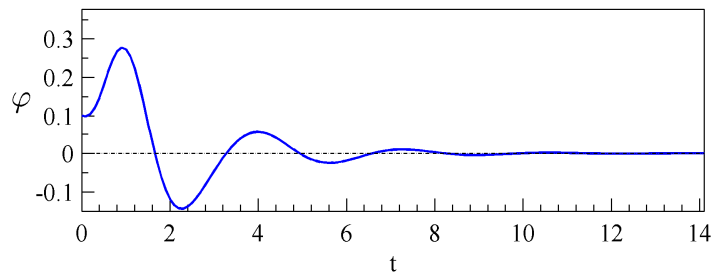
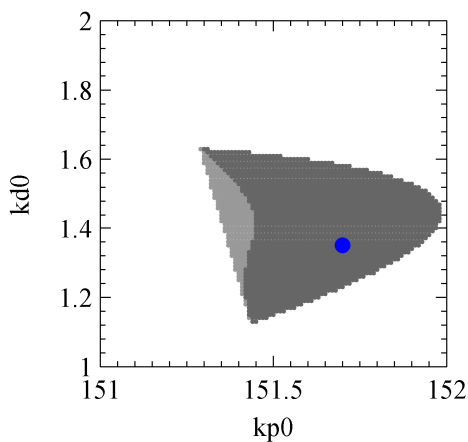
6-5. ábra.

Stabil tartomány SOH tartó,  $l=0.44$  m hosszú rúd,  $\tau = 0.1$  s időkézés esetén

A 6-4. ábrán az elsőrendű tartót alkalmazó, időkézleltetett ( $\tau = 0.1$  s) rendszer stabilitás térképe van ábrázolva 0.44 m hosszú rúd esetén. Az ábrán látható, hogy a nulladrendű tartóhoz tartozó  $l \approx 0.64$  m kritikus rúd hosszhoz képest valójában lehetséges rövidebb rúd kiegyensúlyozása elsőrendű tartó alkalmazásával. Az ábráról az is leolvasható, hogy az erősítési tényezők csak nagyon szűk tartományban mozoghatnak, ami a modell és a valós fizikai rendszer közti lehetséges eltérések miatt problémát jelent (a valós stabilitás térkép eltolódhat). Az 5.3.2. fejezet alapján másodrendű tartó alkalmazásával a stabil tartomány növelhető az elsőrendű tartóhoz képest. A 0.44 m hosszú rúd esetén a másodrendű tartót alkalmazó rendszer stabilitás térképét az 6-5. ábra mutatja.



$$\begin{array}{lll}
 k_{p0} = 151.4 & k_{p1} = -500 & k_{p2} = -1000 \\
 k_{d0} = 1.26 & k_{d1} = 500 & k_{d2} = 1000
 \end{array}$$

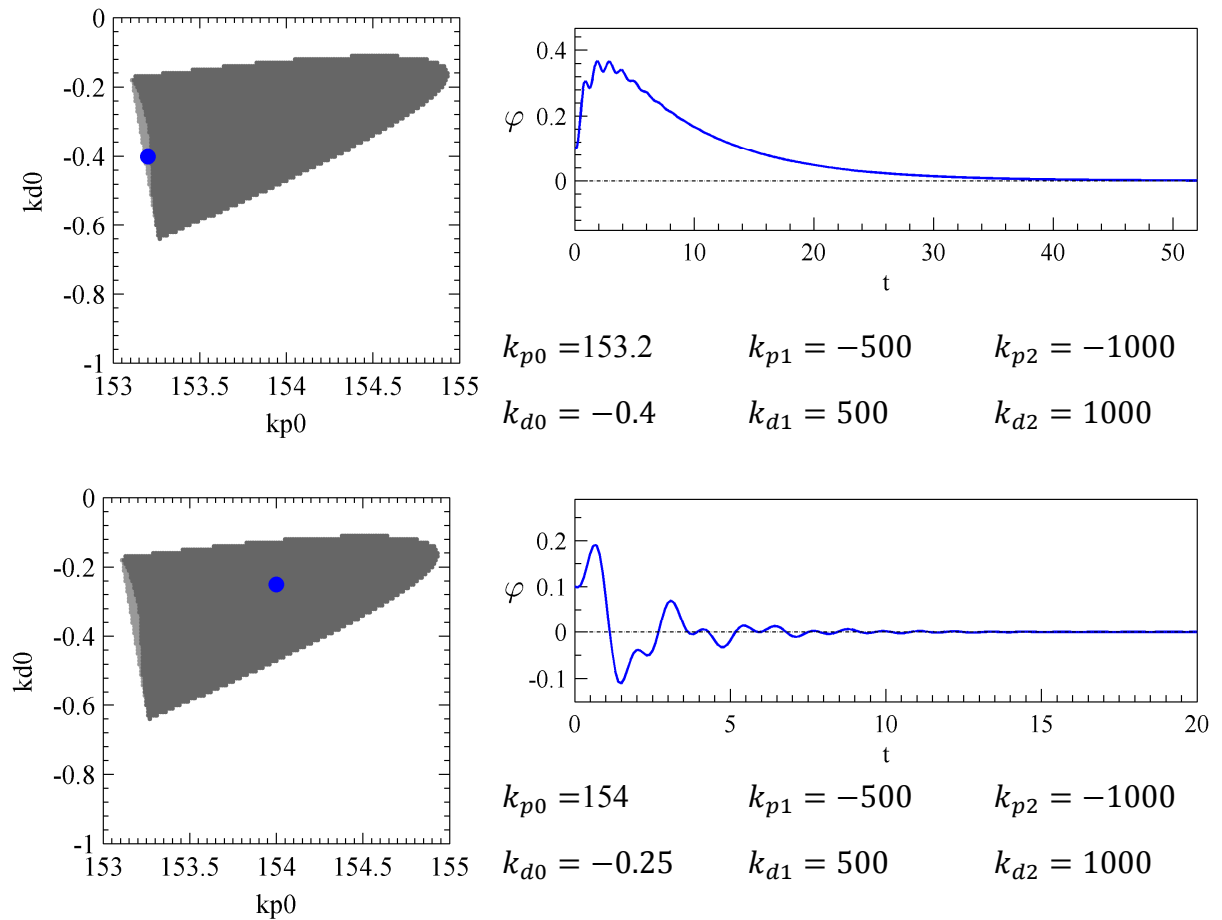


$$\begin{array}{lll}
 k_{p0} = 151.7 & k_{p1} = -500 & k_{p2} = -1000 \\
 k_{d0} = 1.35 & k_{d1} = 500 & k_{d2} = 1000
 \end{array}$$

6-6.ábra.

FOH tartó,  $l=0.44$  m rúd, 0.1 s időkésés stabilitástérkép nulladrendű erősítési tényezők függvényében és két stabil nulladrendű erősítési tényező esetén a rendszer beállása 0.1 rad kitérés után

A 6-6.ábrán a 0.44 m-es rúd egyensúlyi helyzetbe való beállása látható 0.1 rad kitérés esetén. A bal oldalon ábrázolt stabilitás térképeken azok a pontok vannak jelölve világos szürkével, amelyeknél a legnagyobb abszolút értékű gyök valós szám.



6-7. ábra.

SOH tartó,  $l=0.44$  m rúd , 0.1 s időkésés stabilitástérkép nulladrendű erősítési tényezők függvényében és két választott nulladrendű erősítési tényező esetén a rendszer beállása 0.1 rad kitérés után

A 6-7.ábrán látható, hogy másodrendű tartó esetén a valós maximális sajátértékű stabil tartomány nem nőtt a teljes stabil tartománnyal arányos mértékben.

## Összefoglalás

A szakdolgozatom keretein belül a digitális szabályozásoknál alkalmazott tartószerveket hasonlítottam össze a szabályzó rendszer stabilitásának szempontjából. Ezen túl a szabályozási rendszereknél gyakran felmerülő és stabilitási problémákat okozó időkésés hatását is vizsgáltam a különböző tartószervek esetén.

A stabilitás vizsgálatokat a fordított inga egyensúlyozási problémáján keresztül vizsgáltam. A negyedik fejezetben a fordított inga mozgásegyenlete lett levezetve az egyensúlyozás szempontjából lényeges  $\varphi$  szögkitérésre. Mivel a szabályozáshoz diszkrét PD szabályzót alkalmaztam az így kapott szabályozási rendszer hibrid volt, ezért a stabilitás vizsgálatához szükség volt a rendszer időbeli diszkretizálására. A rendszert leíró differenciálegyenletből a konstans-variációs formula egy mintavételezési időintervallumra való felírásával adódott a szabályozási rendszer diszkrét megfelelőjét leíró differencia egyenlet. A különböző tartószervek a beavatkozó jelben eltérnek, ezért a diszkretizálást minden esetben külön el kellett végezni.

A numerikus megoldást nulladrendű tartó esetén időkésés nélküli és időkéséses esetben is a stabilitás határt képző görbék analitikus meghatározásával ellenőriztem.

A stabilitás vizsgálat során a rúd hosszát  $l=1$  m hosszúságúnak vettem, a mintavételezési időt  $\Delta t=0,1$  s-nak. Időkésést tartalmazó rendszer esetén az időkésést egy mintavételezési időnek modelleztem.

A rendszer stabilitását a szabályozás erősítési paramétereinek függvényében vizsgáltam és minden esetben a nulladrendű szabályozási paraméterek síkjában vettem fel a stabilitástérképeket. Elsőrendű tartó esetén a négy szabályozási paraméter változásának hatása még ábrázolható volt két dimenziós ábrán. A másodrendű tartó esetén már hat szabályozási erősítési tényezőt tartalmaz, ezért az ábrázolhatóság érdekében az elsőrendű erősítési tényezők lefixálásával vizsgáltam a másodrendű erősítési tényezők változtatásának hatását a rendszerre.

Az erősítési tényezők függvényében a stabil pontok az alapján lettek meghatározva, hogy a diszkrét átviteli mátrix maximális abszolút értékű sajátértéke a komplex síkon az egység körön belül helyezkedik-e el.



Az 5.2 szakasz alapján az elsőrendű tartó alkalmazásával a stabil tartomány növelhető a nulladrendű tartóhoz képest. Az 5.3 szakasz alapján másodrendű tartó alkalmazásával a stabil tartomány tovább növelhető az elsőrendű tartóhoz képest.

Az 5.4 szakaszban az általánosított tartószerv egy speciális változata, a rendszerhez illesztett tartó alkalmazásával vizsgáltam a fordított inga szabályozásának stabilitását. A stabilitás vizsgálat eredményei szerint a rendszerhez illesztett tartó esetén a szabályozási paraméterek síkjában felvett stabilitástérkép negyed sík, végtelenné válik. Az 5.4.2 szakasz szerint a végtelen stabil tartomány azonban időkésést tartalmazó rendszer esetén lecsökken, végessé válik. Az 5.4.3 szakaszban vizsgált paraméter bizonytalanságok is a stabil tartomány csökkenéséhez vezettek.

Végül az időkésést tartalmazó rendszerek esetén adott időkésés mellett a rúd hossz csökkentése esetén fellépő stabilitásvesztést vizsgáltam. A stabilitásvizsgálatok alapján adott időkésés esetén a nulladrendű tartóhoz tartozó kritikus rúd hossz első és másodrendű tartók alkalmazásával csökkenthető, tehát a nulladrendű tartóhoz tartozó minimális rúd hosszánál rövidebb rudak is kiegyensúlyozhatók.

Összességében elmondható, hogy a magasabb rendű tartószervek alkalmazása pozitív hatással volt a rendszer stabilitására. A beavatkozó jel meghatározásához a rendszer dinamikáját felhasználó rendszerhez illesztett tartó esetén adódtak a legkedvezőbb stabilitási tulajdonságok időkésés nélküli esetben. Időkéséses esetben viszont az SMH tartó stabil tartományának végessé válásával a két tartószervre hasonló stabilitás térképek adódtak.

## Irodalomjegyzék

- [1] STÉPÁN G. (1989): *Retarded Dynamical System*, Longman, Harlow, UK
- [2] DERAKHSHAN, O. (1995): *Increasing the Accuracy of Matrix Exponential Method for Numerical Calculation of Dynamic System Responses*, IMAC XIII - 13th International Modal Analysis Conference, 1995
- [3] YAMAGISHI, S.(2011): *Output feedback stabilization of sampled-data systems by first-order hold input*, SICE Annual Conference, September 13-18, 2011, Waseda University, Tokyo, Japan
- [4] CHAMMAS, A.B., LEONDES, C.T. (1986): *Pole assignment by piecewise constant output feedback*, International Journal of Control, 44, 1986, 1661-1673.
- [5] KABAMBA, P.T. (1987): *Control of linear systems using generalized sampled data hold function*, IEEE Trans. Automat. Control 32, 1987, 772-783.
- [6] YANESI J.L., AGHDAM A. G. (2006): *Optimal Generalized Sampled-Data Hold Functions with a Constrained Structure*, American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, 2006
- [7] GAWTHROP, P.J., WANG, L. (2011): *The system-matched hold and the intermittent control separation principle*, International Journal Of Control, 84(12), pp. 1965-1974
- [8] STÉPÁN G., KOLLÁR L.(2000): *Balancing with Reflex Delay*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 31, pp. 199-205, 2000
- [9] GOPAL, M. (2012): *Digital Control and State Variable Methods*, Tata McGraw-Hill Education Pvt. Ltd.
- [10] SALA, A. (2005): *Improving performance under sampling-rate variations via generalised hold functions*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, (Volume:15 , Issue: 4 ), pp.794 – 797, July 2007
- [11] OGATA, K. (2009):, *Modern Control Engineering (5th Edition)*, Prentice Hall, NJ
- [12] STARR, P.G. (2006): *Introduction to Applied Digital Control*, Department of Mechanical Engineering, The University of New Mexico.

- [13] FREEMAN, H. (1965): *Discrete-time systems*. John Wiley & Sons, New York, USA
- [14] SCHOEN, G.M. (1995): *Stability and Stabilization of Time-delay Systems*, Disszertáció, ETH Zurich
- [15] KIM, W.S., BEJCZY, A.K. (1993): *Demonstration of a high-fidelity predictive preview display technique for telerobotic servicing in space*, IEEE Transactions on Robotics and Automation (1993) 9(5), pp. 698–704.
- [16] LIJIAO W., MENG, B. (2014): *Adaptive Output Feedback Consensus of Networked Robotic Manipulators with Uncertain Parameters and Communication Delays*, IEEE International Conference on Information and Automation, Hailar, China, July 2014
- [17] INSPERGER, T., STÉPÁN, G. (2002): *Semi-discretization method for delayed systems*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 55(5) (2002) pp. 503-518
- [18] WANG, G.Q., Qiang Bib, Xue-Ping Yang. (2001): *High-performance conversions between continuous- and discrete-time systems*, Signal Processing, Vol. Pp.81 1865–1877, 2001
- [19] INSPERGER, T., KOVACS, P., STÉPÁN, G. (2009): *Act-and-wait control concept for a force control process with delayed feedback*, Motion and Vibration Control, 2009, pp 133-142.
- [20] LEHOTZKY, D., INSPERGER, T.(2014): *Stability of systems with state delay subjected to digital control*, Delayed Systems: From Theory to Numerics and applications, Advances in Delays and Dynamics, (Eds: T Vyhlidal, J-F Lafay, R Sipahi), Springer 2014

# Függelék

## F.1 Matlab kódok - stabilitásvizsgálat

### F.1.1.1 $n$ -ed rendű tartó. Időkésés nélküli eset

5-5., 5-8., 5-14., 5-16., 5-17., 5-18., 5-19., 5-21. ábrák

```
1      clear all
2      clc
3
4      a=29.44; t=0.1;
5
6      kp0=sym('kp0');
7      kd0=sym('kd0');
8      kp1=sym('kp1');
9      kd1=sym('kd1');
10     kp2=sym('kp2');
11     kd2=sym('kd2');
12
13     A = [0 1; a 0]
14     K0 =[-kp0,-kd0]
15     K1 =[-kp1,-kd1]
16     K1 =[-kp2,-kd2]
17
18     B =[0 1]'
19
20     Ainv =inv(A);
21     Aexp =expm(A*t);
22     Amexp =expm(-A*t);
23     Ad =Aexp;
24     Bd0 =Aexp*(Ainv*(eye(2)-Amexp))*B*K0;
25     Bd1 =Aexp*((Ainv^2)*(eye(2)-Amexp)-Ainv*Amexp*t)*B*K1;
26     Bd2=Aexp*((2*(Ainv^3)*(eye(2)-Amexp)...
27     - 2*t*(Ainv^2)*Amexp-t^2*Ainv*Amexp)*B*K2;
28     F= Ad+Bd0+Bd1+Bd2;
29     F= subs(F,kp2,-5000);
30     F= subs(F,kd2,5000)
31     F= subs(F,kp1,-500);
32     F= subs(F,kd1,500)
33     F1 =F;
34     P2 =zeros(100,2);
35
36     i=1;
37     for kp0h = 0:10:100
38         for kd0h = 0:0.5:0
39             F=subs(F,kd0,kd0h);
40             F=subs(F,kp0,kp0h);
41             F=double(F);
42             if(max(abs(eig(F)))<1)
43                 P2(i,1) = kp0h;
44                 P2(i,2) = kd0h;
45                 i=i+1;
46             end
47             F=F1;
48         end
49     end
50     scatter(P2(:,1),P2(:,2),'.b');
```

### F.1.1.2 *n*-ed rendű tartó. Időkéséses eset

5-12., 5-20., 5-22., 5-29., 6-3., 6-4., 6-5., 6-6., 6-7. ábrák

F.1.1.szakasz 30 sor módosul:  $F=[Ad \ Bd; \text{eye}(2) \ \text{zeros}(2,2)]$

### F.1.2.1 SMH tartó. Időkésés nélküli eset

5-24., 5-26., 5-27., 5-30., 5-31. ábrák

F.1.1.szakaszhoz képest 6-33. sorok módosulnak:

```
6      kp= sym('kp');
7      kd= sym('kd');
8
9
10     A = [0 1; a 0]
11     A1 = [0 1; a 0]
12     K=[-kp, -kd]
13     B= [0 1]'
14
15     integrand=expm(-A*s)*B*K*expm((A1+B*K)*s)
16
17     integral=int(integrand,s,0,t)
18     Bds=expm(A*t)*integral
19     Ad=expm(A*t)
20
21     F=expm(A*t)+expm(A*t)*integral
```

### F.1.2.2 SMH tartó. Időkéséses eset

5-28. ábra

F.1.1.szakaszhoz képest 6-33. sorok módosulnak

```
6      kp= sym('kp');
7      kd= sym('kd');
8
9
10     A = [0 1; a 0]
11     A1 = [0 1; a 0]
12     K=[-kp, -kd]
13     B= [0 1]'
14
15     integrand=expm(-A*s)*B*K*expm((A1+B*K)*s)
16
17     integral=int(integrand,s,0,t)
18     Bds=expm(A*t)*integral
19     Ad=expm(A*t)
20
21     F=[Ad Bds; eye(2) zeros(2,2)]
```

### F.1.3 Valós gyökök helye stabilitás térképen

6-6. és 6-7. ábrák stabilitástérképei

F.1.1.szakaszhoz képest 35-49. sorok módosulnak:

```
for kp0h = 0:0.1:50
    for kd0h = 0:0.1:50
        F=subs(F,kd0,kd0h);
        F=subs(F,kp0,kp0h);
        F=double(F);
        if (max(abs(eig(F)))<1)
            P2b(i,1)=kp0h;
            P2b(i,2)=kd0h;
            i=i+1;
            FEig=eig(F);
            sel= FEig==real(FEig);
            sel2= eig(F)==max(abs(FEig));
            if (~any(sel2&sel) )
                PReal(iReal,1)=kp0h;
                PReal(iReal,2)=kd0h;
                iReal=iReal+1;
            end
        end
        F=F1;
    end
end
```

## F.2 Szimuláció rendszer beállítására

### F.2.1 $n$ -ed rendű tartószerv, időkésés eset

6-6., 6-7. ábrák

```
1      close all; clear all; clc;
2      a=134; t= 0.1;
3      kp0= sym('kp0');
4      kd0= sym('kd0');
5      kp1= sym('kp1');
6      kd1= sym('kd1');
7      kp2= sym('kp2');
8      kd2= sym('kd2');
9      syms s
10
11     A = [0 1; a 0]
12     K0=[-kp0,-kd0]
13     K1=[-kp1,-kd1]
14     K2=[-kp2,-kd2]
15     B= [0 1]
16
17     Ainv=inv(A);
18     Aexp=expm(A*t);
19     Amexp=expm(-A*t);
20
21     Ad=Aexp;
22     Bd0=Aexp*(Ainv*(eye(2)-Amexp)*B*K0)
23     Bd1=Aexp*(((Ainv^2)*(eye(2)-Amexp)-Ainv*Amexp*t)*B*K1)
24     Bd2=Aexp*((2*(Ainv^3)*(eye(2)-Amexp)-2*t*(Ainv^2)*Amexp-
25     Bd=Bd0+Bd1+Bd2
26     F=[Ad Bd; eye(2) zeros(2,2)]
27
28     kp00=153.2
29     kd00=-0.4
30
31     F=subs(F,kp2,-1000)
32     F=subs(F,kd2,1000)
33     F=subs(F,kp1,-500)
34     F=subs(F,kd1,500)
35     F=subs(F,kp0,kp00)
36     F=subs(F,kd0,kd00)
37
38     F=double(F)
39     xk1=[0.1 0]'
40     xk2=[0.1 0]'
41     x=[xk1;xk2]
42     Pd2=[]
43     Pd2(1)=x(1)
44     Pd2(2)=x(3)
45
46     x2=x
47     for k=0:0.1:1000
48         x=F*x
49         Pd2(i)=x(1);
50         i=i+1;
51         if (k>150&&abs(x(1))<0.001 && abs(Pd2(i-10)<0.001))
52             break
53     end
54     Pk=0:0.1:(k+0.2)
55     plot(Pk,Pd2,'b')
```

## F.2.2 SMH tartó, időkésés nélküli eset

5-26. ábra

F.2.1.szakaszhoz képest 21-37. sorok módosulnak:

```
6      integrand=expm(-A*s)*B*K*expm((A1+B*K)*s)
7
8      integral=int(integrand,s,0,t)
9
10     F=expm(A*t)+expm(A*t)*integral
11
12
13     F=subs(F,kp0,200)
14     F=subs(F,kd0,50)
15     integrand=expm(-A*s)*B*K*expm((A1+B*K)*s)
16
17     integral=int(integrand,s,0,t)
18
19     F=expm(A*t)+expm(A*t)*integral
```